

Prof. Camillo Nuti Dispense di Costruzioni in Zona Sismica 2007

Appunti del Corso di

Costruzioni In Zona Sismica

Prof. Ing. Camillo Nuti

Università Degli Studi Roma Tre

RISPOSTA DINAMICA DELLE STRUTTURE	4
1.1 L'Oscillatore semplice	4
1.1.1 Soluzione dell'equazione di equilibrio	6
1.2 Lo spettro di risposta	16
1.2.1 Spettri di risposta di accelerogrammi	20
1.2.2 Spettri di risposta ricavati a partire dalle caratteristiche di sismicità regionale	22
1.2.3 Spettri di risposta risposta di norma	26
1.2.4 Confronto tra spettri normativi ed alcune proposte in letteratura	34
1.2.5 Testo della Ordinanza della Protezione Civile 3274 relativo alla definizione della Azione Sismica	36
1.3 Oscillatore Semplice: Soluzione nel caso in cui il termine noto è una forza cosinusoidale	42
1.3.1 Valutazione del transitorio	45
1.4 Oscillatore semplice: Risposta al moto del terreno	49
1.5 Oscillatore semplice: Valutazione della Risposta in Forma Numerica	51
1.5.1 Calcolo della risposta dinamica al passo: Metodo di integrazione al passo dell'equazione del moto	51
1.5.2 Metodi espliciti: le differenze centrali	51
1.5.3 Metodi impliciti: il metodo di Newmark	55
1.5.4 Riferimenti bibliografici	55
1.6 Oscillatore Semplice: Stima della risposta massima non lineare	56
2 Strutture a Più Gradi di Libertà: Coordinate Generalizzate	59
2.1 EQUAZIONI DEL MOTO E MATRICI DELLE MASSE E DELLE RIGIDEZZE	60
2.2 SOLUZIONE CON APPLICAZIONE AD UN TELAIO PIANO	61
3 Strutture a Più Gradi di Libertà: Analisi Modale	63
3.1 CALCOLO DELLE FREQUENZE E PERIODI PROPRI DEL SISTEMA	63
3.1.1 PROPRIETA' DI ORTONORMALITA' DEGLI AUTOVETTORI	72
3.1.2 CALCOLO ITERATIVO DEI MODI E FREQUENZE PROPRIE	74
3.2 CALCOLO DELLA RISPOSTA: METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE MODALE	75
3.2.1 ESEMPIO: Calcolo della risposta di un telaio con lo spettro di risposta	79
3.2.2 Criteri di sovrapposizione modale con l'uso dello spettro di risposta	80
3.3 TELAIO SHEAR-TYPE 2 PIANI ISOLATO ALLA BASE	83
3.3.1 MATRICI DEL SISTEMA DI EQUAZIONI DEL MOTO	83
3.3.2 CALCOLO DELLE FREQUENZE E PERIODI PROPRI DEL TELAIO	84
3.3.3 CALCOLO DEGLI AUTOVALORI	86
3.3.4 CALCOLO FATTORI DI PARTECIPAZIONE	89
3.3.5 CALCOLO DELLA MASSE ECCITATE	89
3.3.6 CALCOLO DELLA RISPOSTA SISMICA : Metodo dello Spettro di Risposta	90
4 Le analisi di spinta	96
4.1 Caratteristiche dell'Oscillatore Equivalente ad una Struttura	99
4.2 Valutazione della risposta massima in spostamento dell'oscillatore equivalente	101
4.2.1 Criterio di equivalenza tra struttura non lineare e struttura elasto viscosa	103

5	<i>Rappresentazione degli accelerogrammi in serie di fourier: lo spettro di potenza.....</i>	<i>110</i>
5.1	<i>Esercizio</i>	<i>113</i>

RISPOSTA DINAMICA DELLE STRUTTURE

1.1 L'Oscillatore semplice

Una struttura che la cui una massa può schematizzarsi come concentrata in un punto è detta "oscillatore semplice". Segue da tale schema che lo stato di deformazione strutturale è noto quando è noto il moto della massa, unica fonte delle forze di inerzia che agiscono sulla struttura. Esempi di oscillatore semplice sono mostrati in Figura 1.

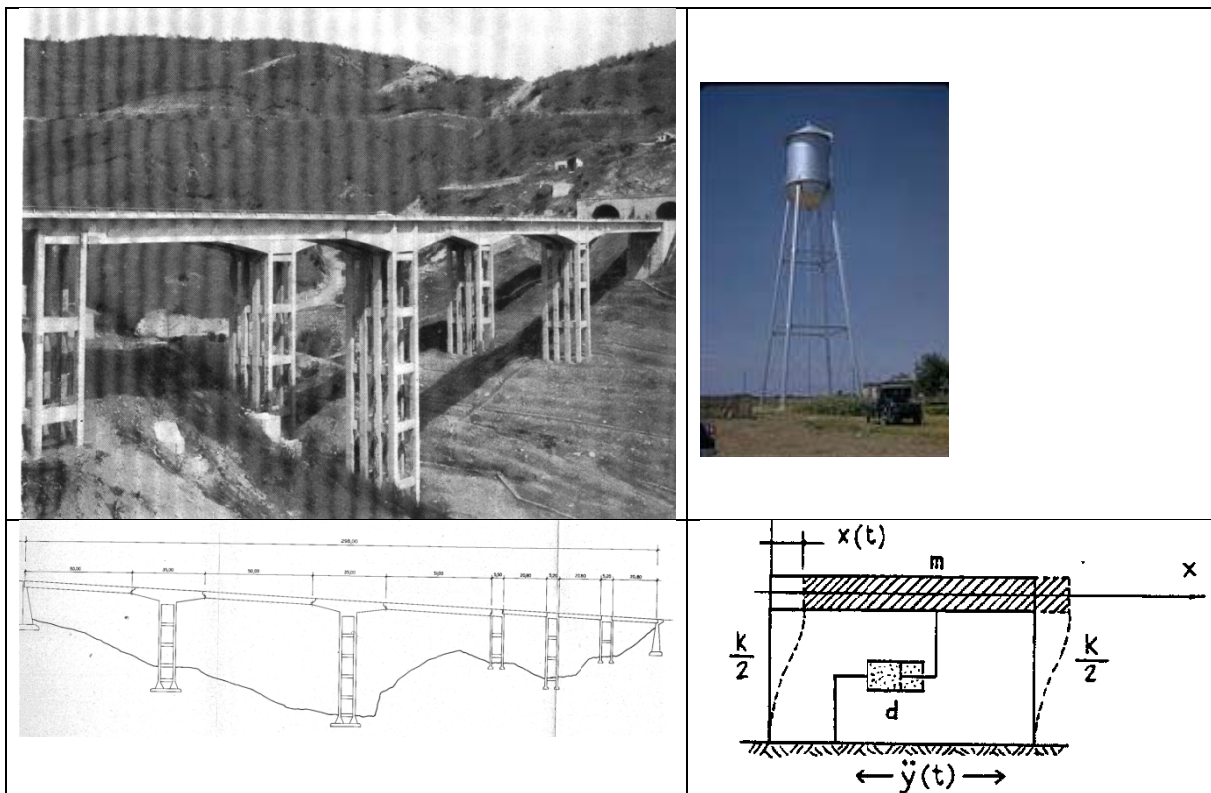


Figura 1 esempi di strutture schematizzabili come un oscillatore semplice e schema strutturale

Con riferimento alla figura si osserva che le masse del ponte e del serbatoio sono essenzialmente concentrate in sommità. Nel ponte si osserva che le travi tamponi dell'impalcato sono ciascuna appoggiate da un lato su un carrello e dall'altro su una cerniera, pertanto il ponte in senso longitudinale può essere schematizzato con tanti oscillatori semplici (se si assume nullo l'attrito dei carrelli) costituiti ciascuno da una pila priva di massa (massa trascurabile) e dalla massa in sommità, somma di quella della stampella e della trave tamponi collegata alla stampella con una cerniera.

Le due strutture indicate in Figura 1 possono quindi essere schematizzate come una massa sopportata da strutture elastiche di sostegno prive di massa. Nella figura si è indicato lo schema a portale con trave infinitamente rigida. La rigidità alla traslazione orizzontale è K ($K/2$ per ciascun piedritto).

E' possibile scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione della massa. Detta :

$x; \dot{x}; \ddot{x}$ lo spostamento relativo della massa rispetto alla base e le sue derivate prima e seconda rispetto al tempo (velocità ed accelerazione relativa) ed \ddot{y} la accelerazione della base rispetto ad un sistema fisso, cioè l'accelerazione del terreno, la forza di inerzia F_i è data dal prodotto della massa m per l'accelerazione assoluta $\ddot{x} + \ddot{y}$:

$$F_i = m \cdot (\ddot{x} + \ddot{y})$$

La forza elastica di richiamo nella posizione di quiete: $x=0$ vale

$$F_e = k \cdot x$$

Vi è poi una forza dissipativa, di tipo quindi non conservativo, che è comodo ai fini degli sviluppi per la soluzione elastica in forma chiusa mettere nella forma di dissipazione viscosa:

$$F_d = d \cdot \dot{x}$$

Infine può agire sulla massa una generica forza F .

Per l'equilibrio della massa si deve avere che ad ogni istante:

$$F_i + F_d + F_e = F$$

sostituendo si ottiene:

$m \cdot (\ddot{x} + \ddot{y}) + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = F$	(1
---	-----

Naturalmente nella espressione (1) la accelerazione del terreno \ddot{y} e la storia della forza esterna F sono note, oltre ad essere note m , k , d , caratteristiche meccaniche della struttura, pertanto si può portare a secondo membro i termini noti:

$m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = F - m \cdot \ddot{y}$	(2
---	-----

i termini $m \cdot \ddot{x}$; $m \cdot \ddot{y}$ hanno le dimensioni di una forza ma non hanno significato fisico, la loro somma è la forza di inerzia. Tuttavia è consuetudine chiamare il secondo "forza di trascinamento" della struttura.

1.1.1 Soluzione dell'equazione di equilibrio

Risolvere l'equazione differenziale (2) vuol dire trovare la funzione $x(t)$ che soddisfa l'eguaglianza. La (2) è una equazione differenziale a coefficienti costanti. La soluzione si trova come somma dell'integrale generale, che è la soluzione dell'equazione (2) con termine noto nullo, che rappresenta l'equazione di equilibrio in assenza di moto del terreno e di forze esterne ed è detta equazione omogenea associata, l'integrale particolare che soddisfa il caso con il termine noto assegnato, nel caso in questione $F - m \cdot \ddot{y}$.

Si divida la (2) per la massa m , si ottiene l'equazione:

$\ddot{x} + \frac{d}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F}{m} - \ddot{y}$	(3)
---	-----

si vede quindi che le tre grandezze m , d , k non intervengono nel l'equilibrio in maniera indipendente tra loro, ma legate da un rapporto; si pone allora

$\frac{k}{m} = \omega^2; \frac{d}{m} = 2v\omega \Rightarrow v = \frac{d}{2\omega m}$	(4)
--	-----

v è detto rapporto di smorzamento, (essendo il rapporto tra il coefficiente di smorzamento d ed il prodotto $2\omega m$ detto smorzamento critico) e vale per le strutture reali tra lo 0.5 ed il 5%, quest'ultimo valore essendo quello tipico degli edifici.

Come si vedrà nel seguito, una struttura avente uno smorzamento pari al critico, e quindi $v=1$, caso che non si verifica per alcuna struttura dell'ingegneria civile, allontanata dalla sua posizione di equilibrio, vi ritorna asintoticamente senza compiere alcuna oscillazione.

1.1.1.1 SOLUZIONE PER IL CASO DI TERMINE NOTO UGUALE A ZERO (oscillazioni libere)

$\ddot{x} + 2v\omega \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$	(5)
--	-----

per $v = 0$ L'integrale generale, che rappresenta la soluzione del problema, essendo il termine noto nullo, è del tipo:

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$	(6)
---	-----

in cui le costanti A e B devono essere determinate ponendo le condizioni ai limiti, in questo caso si ha per $t=0$ $x = x_0; \dot{x} = \dot{x}_0$ (condizioni iniziali) :

$$\begin{aligned} x_0 &= A\cos(\omega 0) + B\sin(\omega 0) \Rightarrow x_0 = A \\ \dot{x}_0 &= -\omega A\sin(\omega 0) + \omega B\cos(\omega 0); \Rightarrow \dot{x}_0 = \omega B\cos(\omega 0) \Rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{aligned}$$

sostituendo i valori trovati nell'integrale generale si ha:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}}{\omega} \sin \omega t \quad (7)$$

L'espressione della risposta mostra che la storia degli spostamenti di una struttura priva di smorzamento è periodica, essendo somma di due funzioni periodiche che assumono lo stesso valore dopo per valori dell'argomento ωt che differiscono di un multiplo di 2π . Pertanto ragionando in termini di tempo la risposta assume gli stessi valori quando:

$$\omega t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = T \quad (8)$$

Il valore T viene pertanto detto periodo proprio della struttura, ed è una grandezza che dipende dalle caratteristiche meccaniche della stessa. Esso è il tempo che intercorre tra due oscillazioni consecutive di massima ampiezza di una struttura nelle sue oscillazioni libere. Si noti che esso aumenta con la massa e diminuisce con la rigidità. I valori del periodo delle strutture civili variano in genere tra qualche decimo di secondo ed al più qualche secondo. Ad esempio per gli edifici a telaio vale la regola empirica: $T=0.1N$ ove N è il numero dei piani, col che si capisce che in Italia la gran parte degli edifici ha periodi compresi tra 0.1 e 1 secondo (1-10 piani). Vengono in genere dette "rigide" le strutture con periodo inferiore a 0.2-0.3 secondi, "medie" tra 0.3 e 0.6-0.7 secondi flessibili al di sopra di 0.8-1 secondo. I terremoti in generale impegnano particolarmente gli edifici con periodo compreso tra 0.1 e 0.6-0.8 secondi, cioè proprio il campo di periodi propri dell'edilizia corrente italiana. Sono meno sensibili i grattacieli, che hanno periodi spesso superiori ai 3 secondi ed i grandi ponti, si pensi ad esempio che il Golden Gate Bridge di S Francisco ha il periodo proprio in senso trasversale di 18.2 secondi ed in senso verticale di 10.2 secondi.

Per $0 < \nu < 1$, (le strutture reali hanno sempre $\nu > 0$, in genere ν non supera il 5-10%) la soluzione è:

$x = e^{-\nu\omega t} [A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t];$ $x = e^{-\nu\omega t} [x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega_1 t];$ $\omega_1 = \omega \sqrt{1 - \nu^2}$	(9
---	-----

l'espressione tra parentesi è analoga a quella trovata per $\nu = 0$ con la sola differenza la frequenza ω è leggermente minore a causa dello smorzamento. Questa diminuzione della frequenza è trascurabile per i valori di smorzamento tipici delle strutture civili: si tenga presente che se $\nu = 0.20$ $\omega_1 = 0.98\omega$.

Si hanno pertanto oscillazioni di frequenza e quindi di periodo pressoché uguali a quelli precedenti, ma di ampiezze decrescenti per effetto del termine esponenziale negativo che contiene il rapporto di smorzamento ν .

Analogamente a quanto fatto in precedenza si determinano le costanti A e B imponendo le condizioni iniziali e si ottiene l'espressione (10:

$x = e^{-\nu\omega t} [x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0 + \nu\omega x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t]$ $; \omega_1 = \omega \sqrt{1 - \nu^2}$	(10
$x = e^{-\nu\omega t} [x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t];$	(11

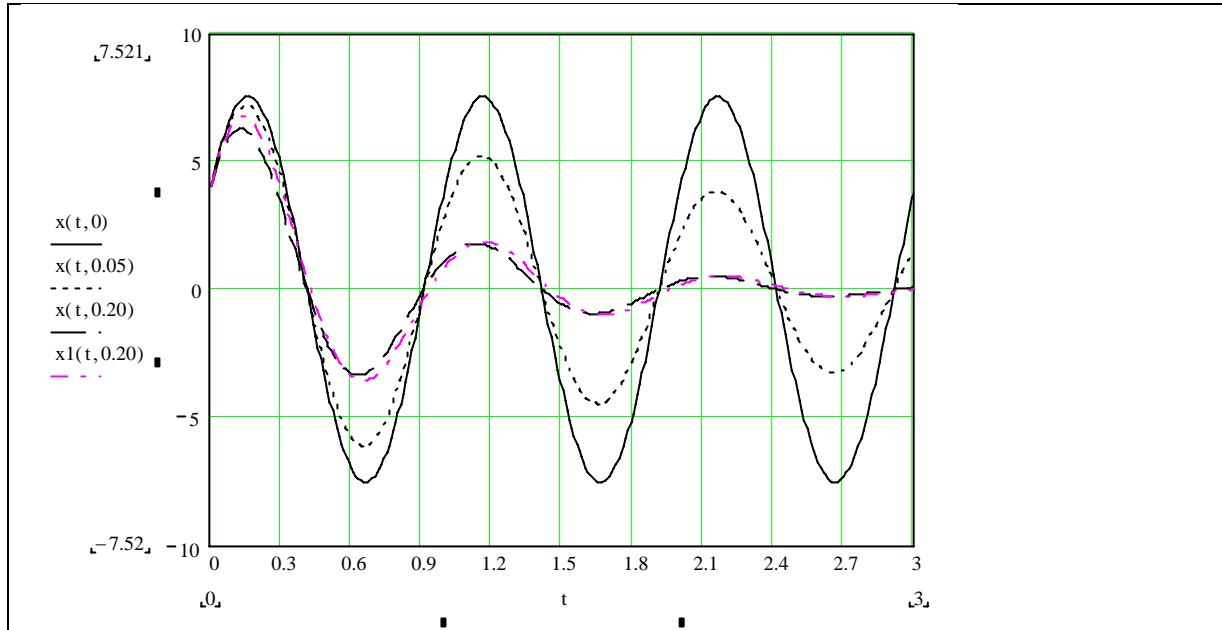


Figura 2 Funzioni di risposta $x(t, v)$, per diversi valori dello smorzamento. La funzione $x(\cdot)$ è valutata con l'espressione approssimata (11, la funzione $x1(\cdot)$ con l'espressione esatta (10. I valori adottati sono $m=25.35 \text{ t}$, $k=1000 \text{ kN/m}$. Spostamento iniziale $x_0 = 3 \text{ m}$, velocità iniziale $= 40 \text{ m/sec}$. Si noti l'influenza di v .

Il prodotto $v\omega x_0$ è trascurabile rispetto a \dot{x}_0 , così come ω_1 differisce poco da ω , pertanto dal punto di vista pratico è possibile utilizzare l'espressione della risposta non smorzata moltiplicata per il termine smorzante esponenziale, secondo l'espressione (11, come peraltro dimostrato dalla Figura 2.

Da questa espressione sembrerebbe che una struttura più rigida (ω grande) a parità di smorzamento v , smorzi le oscillazioni più rapidamente; ma in realtà questo non avviene spesso poiché non è esattamente valido che la viscosità sia direttamente proporzionale alla velocità, come è stato assunto nello scrivere la equazione del moto.

$v=1$ (smorzamento critico) manca il termine oscillatorio e si ha:

$$x = e^{-\omega t} [x_0(1 + \omega t)] \quad (12)$$

è un caso che non presenta nessun interesse pratico.

Esaminiamo il caso avente condizioni iniziali : spostamento nullo e velocità assegnata.

$$x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = A = 0$$

$$\dot{x}_0 = \omega B \cos(\omega 0) \Rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

La legge del moto diviene quindi:

$$x = e^{-\nu \omega t} \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] ; \omega_1 = \omega \sqrt{1 - \nu^2} \quad (13)$$

$$x = e^{-\nu \omega t} \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \right] ; \quad (14)$$

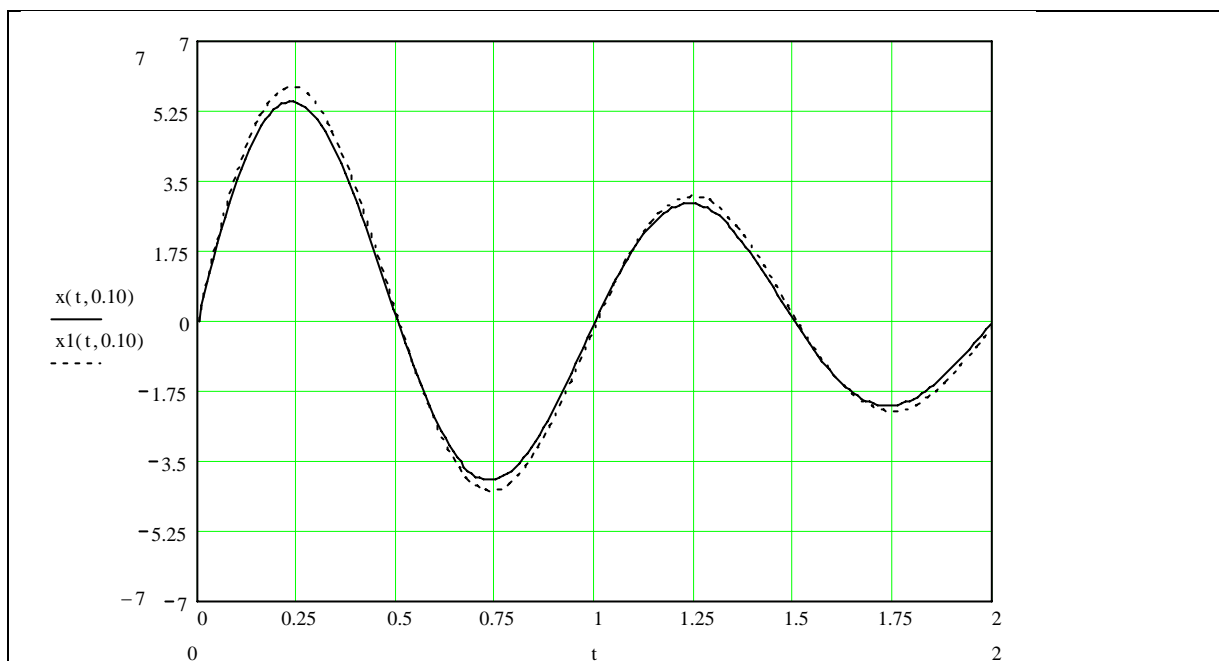
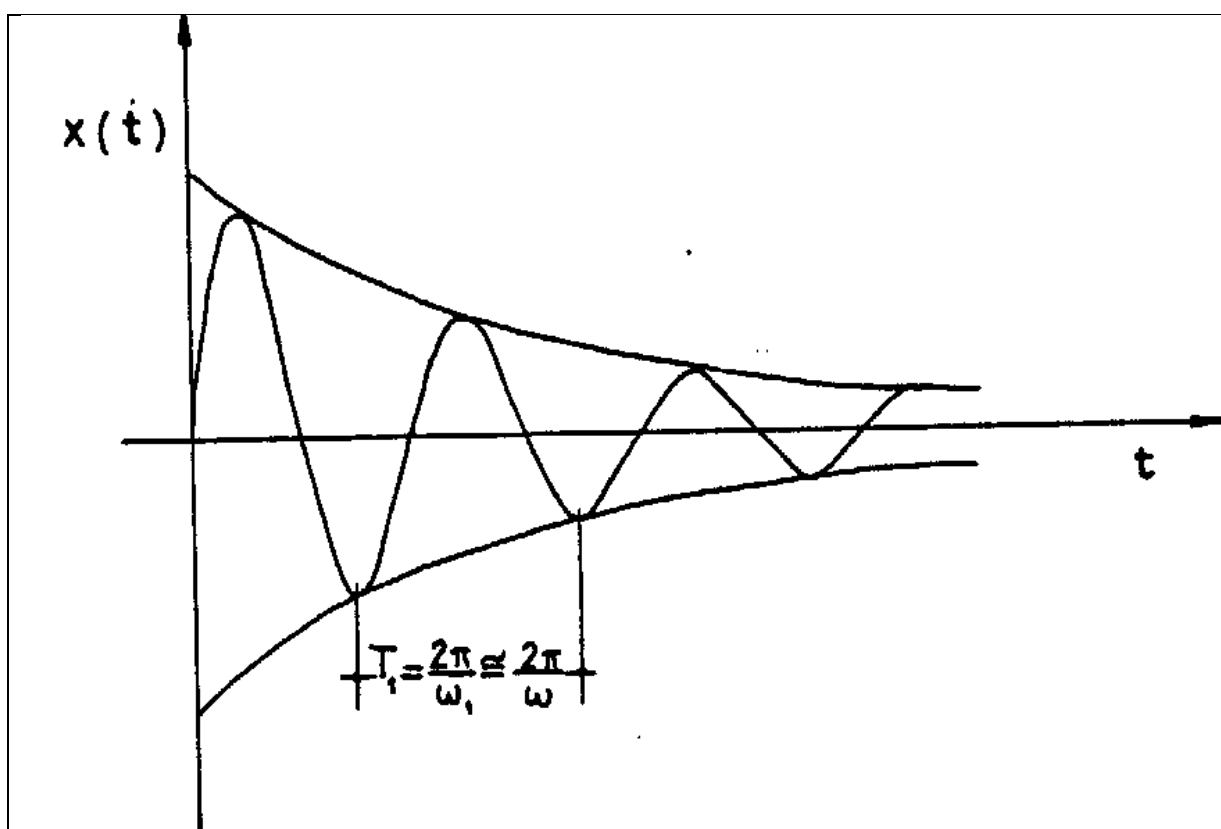
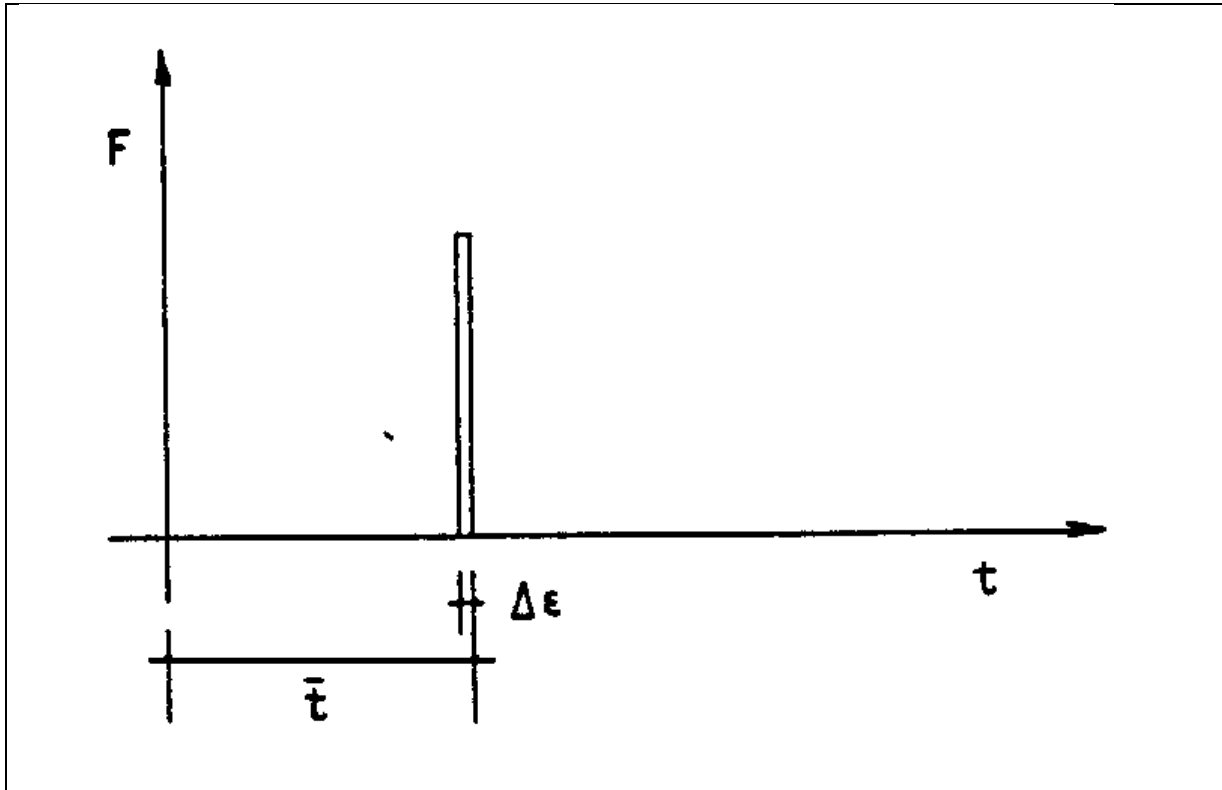


Figura 3 Funzioni di risposta $x(t, \nu)$, nel caso di spostamento iniziale $x_0 = 0$, velocità iniziale $= 40$ m/sec.. La funzione $x(\cdot)$ è valutata con l'espressione approssimata (13 la funzione $x1(\cdot)$ con l'espressione esatta (14. I valori adottati sono $m = 25.35$ t, $k = 1000$ kN/m.

Il problema fisico è lo studio di una vibrazione provocata da una forza del tipo $F(t)$ applicata per un tempo estremamente limitato. Si definisce impulso la seguente espressione:

$I = \lim_{\Delta \varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} F(t) dt$	(15)
--	------





del moto Riscrivendo l'equazione

$m\ddot{x} + k \cdot x = F(t)$	(16
--------------------------------	------

si possono integrare vari membri da t_0 a $t_0 + \Delta\epsilon$ calcolarne il limite per $\Delta\epsilon$ che tende a 0:

$\lim_{\Delta\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta\epsilon} m\ddot{x} dt + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta\epsilon} k \cdot x dt = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta\epsilon} F(t) dt$ $\lim_{\Delta\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta\epsilon} m \frac{d\dot{x}}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta\epsilon} k \cdot x dt = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta\epsilon} F(t) dt$ $\lim_{\Delta\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta\epsilon} m d\dot{x} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta\epsilon} k \cdot x dt = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta\epsilon} F(t) dt$	(17
---	------

SS

Ottenendo, per il termine noto, l'espressione di una forza impulsiva.

Il primo termine, in cui si è espressa l'accelerazione come derivata della velocità rispetto al tempo, rappresenta, dopo la semplificazione, l'integrale di un differenziale di una funzione, quindi la funzione stessa. Il secondo termine invece si può risolvere solo esplicitando la funzione $x(t)$, ma essendo l'intervallo infinitesimo possiamo approssimarla con una funzione lineare $x(t)=at$. Si ottiene allora:

$m[\dot{x}]_{t_0}^{t_0+\varepsilon} + k \cdot a \left[\frac{x^2}{2} \right]_{t_0}^{t_0+\varepsilon} = I$	(18
---	------

il primo termine è la differenza tra la velocità finale e quella iniziale moltiplicata per la massa, ma essendo la velocità, la velocità iniziale è tuttavia nulla, pertanto essa rappresenta la velocità che ha la massa su cui ha agito l'impulso, e quindi è la velocità del moto che ne deriva. Il secondo termine al tendere dell'intervallo a zero, risulta essere un infinitesimo di ordine superiore e quindi trascurabile; si ha quindi:

$m\dot{x}_0 = I \Rightarrow \dot{x}_0 = \frac{I}{m}$	(19
--	------

Sostituendo quindi la legge del moto derivante da una forza impulsiva assume la seguente espressione:

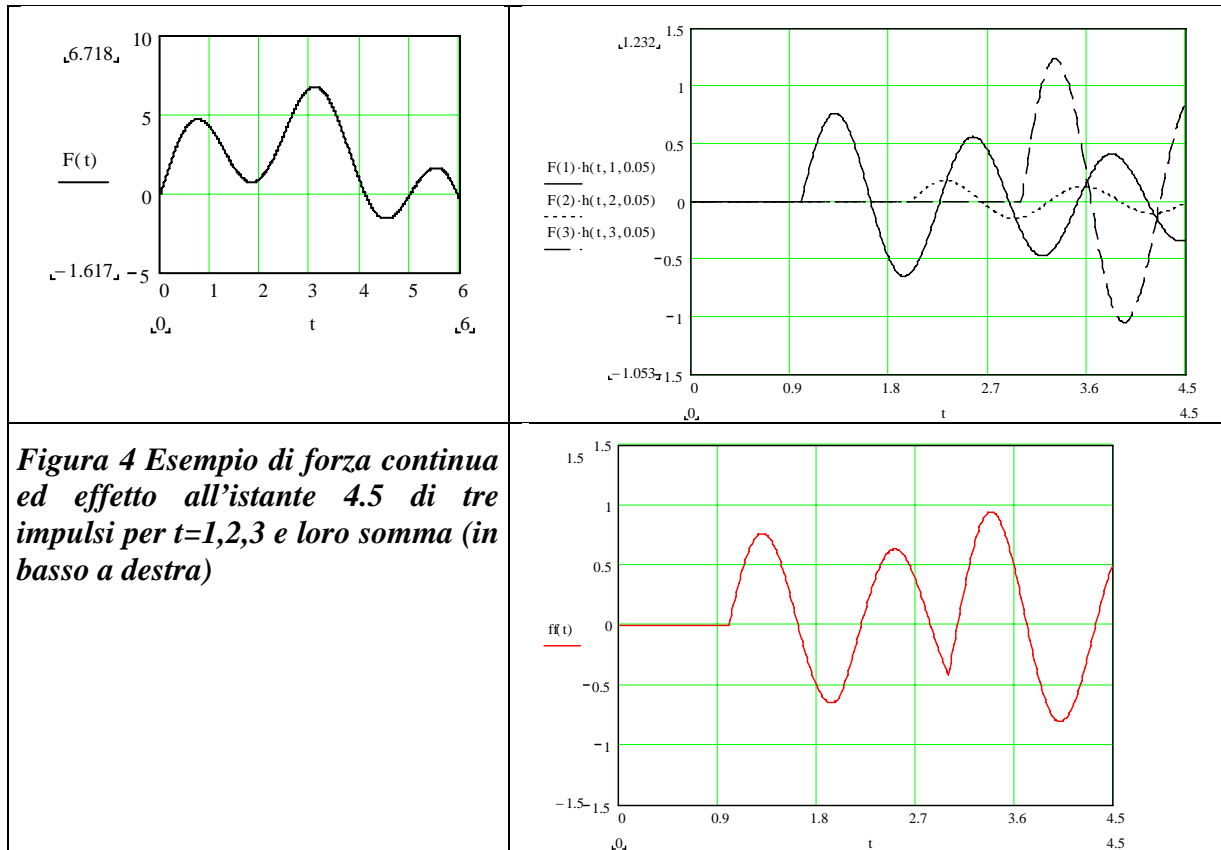
$x = \frac{I}{m} \frac{1}{\omega} e^{-\nu\omega t} \sin \omega t ;$	(20
---	------

chiamata "funzione di risposta a impulso" e indicata con il simbolo $h(t)$.

Se l'impulso anziché all'istante $t=0$ agisce all'istante $t=\tau$, allora lo spostamento x all'istante t dovuto all'impulso dipende dal tempo intercorso $\Delta t=t-\tau$, pertanto si ha

$x(t) = \frac{I(\tau)}{m} \frac{1}{\omega} e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) ;$	(21
--	------

La generica storia di forze $F(t)$, può essere pensata come successione di impulsi $F(\tau)d\tau$



La risposta al tempo t diviene quindi la sovrapposizione degli effetti di tutti gli impulsi che precedono il tempo t , cioè:

$$x(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)}{m} \frac{1}{\omega} e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin\omega(t-\tau) d\tau \quad (22)$$

Assumendo come $F(\tau)$ proprio il termine noto della equazione di equilibrio (2), e sostituendo nella (22) si ottiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{-ma(\tau)}{m} \frac{1}{\omega} e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin\omega(t-\tau) d\tau \\ x(t) &= \int_0^t a(\tau) \frac{1}{\omega} e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin\omega(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

La espressione (23 è detta risposta ad un accelerogramma nel dominio del tempo o anche “integrale di Duhamel”.

Volendo eseguire un calcolo approssimato, ma più efficiente dal punto di vista del tempo di calcolo, si può osservare che è sufficiente tener conto degli impulsi che precedono l'istante t di calcolo di un tempo multiplo del periodo di non oltre 10 volte, ad esempio per una struttura con $T=0.5$, è sufficiente considerare un tempo precedente di non oltre 5 secondi.

1.2 Lo spettro di risposta

Osservando la espressione (23 si nota come, dato un accelerogramma, la risposta dipenda esclusivamente dai due parametri, v ed ω . Pertanto due strutture aventi gli stessi valori di v ed ω hanno la stessa storia della risposta, ed in particolare la stessa risposta massima. In generale nelle costruzioni civili non si è interessati all'intera storia della risposta ma ai valori massimi delle sollecitazioni e degli spostamenti. Una volta noto lo spostamento massimo X_{\max} , la sollecitazione massima vale:

$F_{\max} = k \cdot X_{\max}$	(24
-------------------------------	------

E' possibile così dimensionare la struttura se si vuole che resti in campo elastico. In alternativa, noto X_{\max} , è possibile dimensionare la struttura perché sopporti lo spostamento X_{\max} .

Dal punto di vista del progettista è pertanto molto utile dato un accelerogramma disporre di un diagramma dove in ascisse sono riportati i periodi propri T ed in ordinata il valore di X_{\max} . Si possono costruire curve per diversi valori del rapporto di smorzamento v .

Si osserva che ricavata lo spostamento massimo, e la relativa forza, è possibile chiedersi quale è la accelerazione che produrrebbe una uguale forza di inerzia:

$F_{\max} = k \cdot X_{\max} = m \cdot Sa$	(25
--	------

Invertendo la (23 si ottiene:

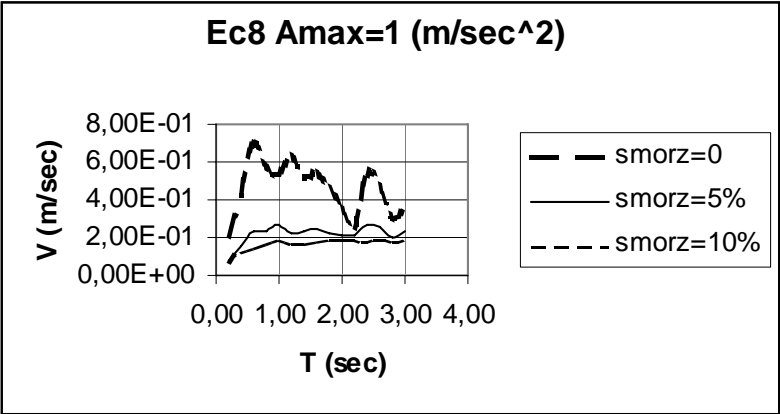
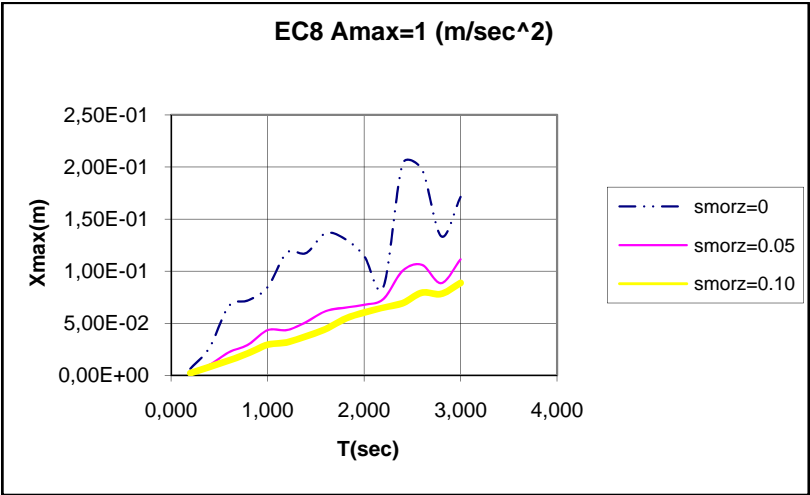
$Sa = \frac{k}{m} \cdot X_{\max} \Rightarrow Sa = \omega^2 \cdot X_{\max}$	(26
--	------

Se tutta l'energia di deformazione si trasformasse in energia cinetica, cosa che avverrebbe in assenza di smorzamento, si avrebbe:

$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot X_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot Sv_{\max}^2 \Rightarrow Sv_{\max} = \omega \cdot X_{\max}$	(27
--	------

Dalla (23 e (23 si ottiene il legame tra Sa ed Sv :

$Sa = \omega \cdot Sv$	(28
------------------------	------



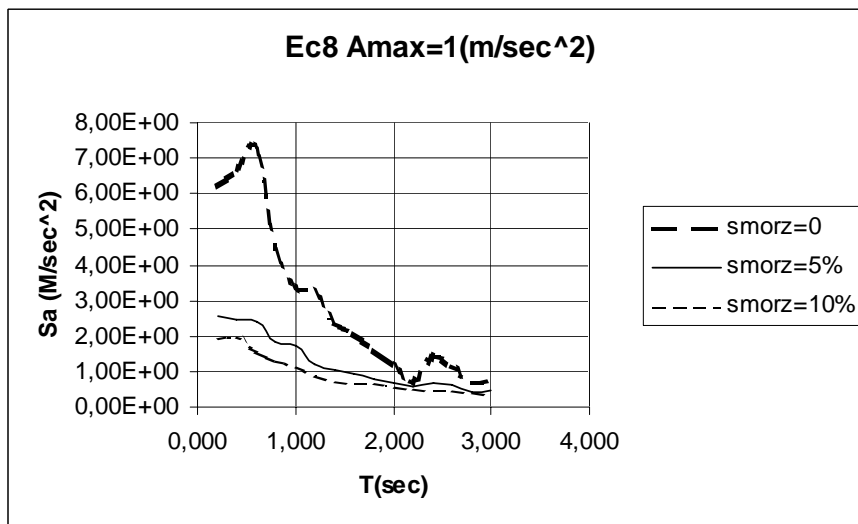


Figura 5 Spettri di risposta in spostamento, pseudovelocità e pseudoaccelerazione, per diversi valore dello sporzamento. In basso spettro di risposta in scala trilogaritmica.

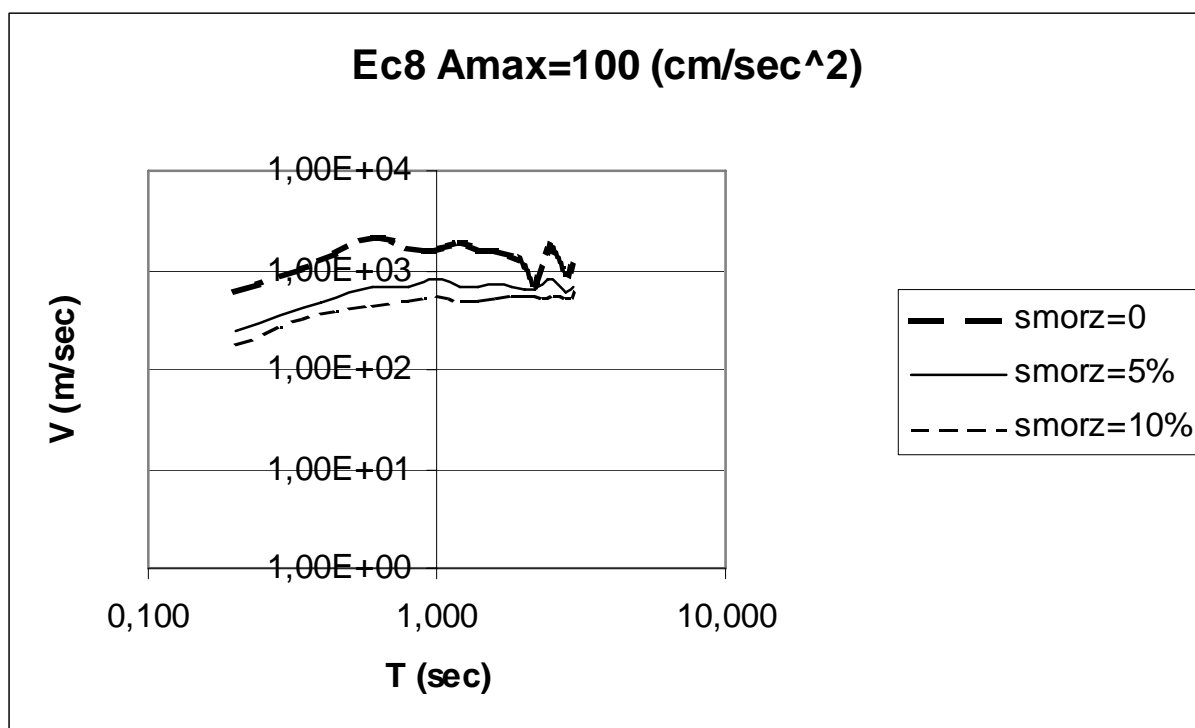


Figura 6 spettro di risposta in velocità in scala logaritmica.

S_v ed S_a sono dette Pseudovelocità e Pseudoaccelerazione dell'oscillatore, non essendo esattamente la velocità o l'accelerazione assoluta dello stesso. Si osserva in particolare che la accelerazione assoluta deve tendere al valore della accelerazione del terreno per T che tende a zero, cioè per strutture infinitamente rigide che traslano quindi con il terreno, inoltre la velocità relativa deve tendere alla velocità del terreno quando la struttura è infinitamente flessibile, quando cioè T tende all'infinito, poiché la massa in tal caso rimane ferma rispetto al sistema fisso mentre il terreno si muove. Vi sono pertanto differenze tra pseudovelocità e velocità relativa della struttura in corrispondenza dei periodi lunghi, mentre la accelerazione assoluta differisce dalla pseudoaccelerazione in prossimità di $T=0$.

Si osserva infine che, come detto, nel caso di struttura molto flessibile, la massa tende a rimanere ferma, pertanto lo spostamento relativo è pari a quello assoluto del terreno U_0 , pertanto lo spettro di risposta in spostamento deve tendere a U per T che tende all'infinito.

1.2.1 Spettri di risposta di accelerogrammi

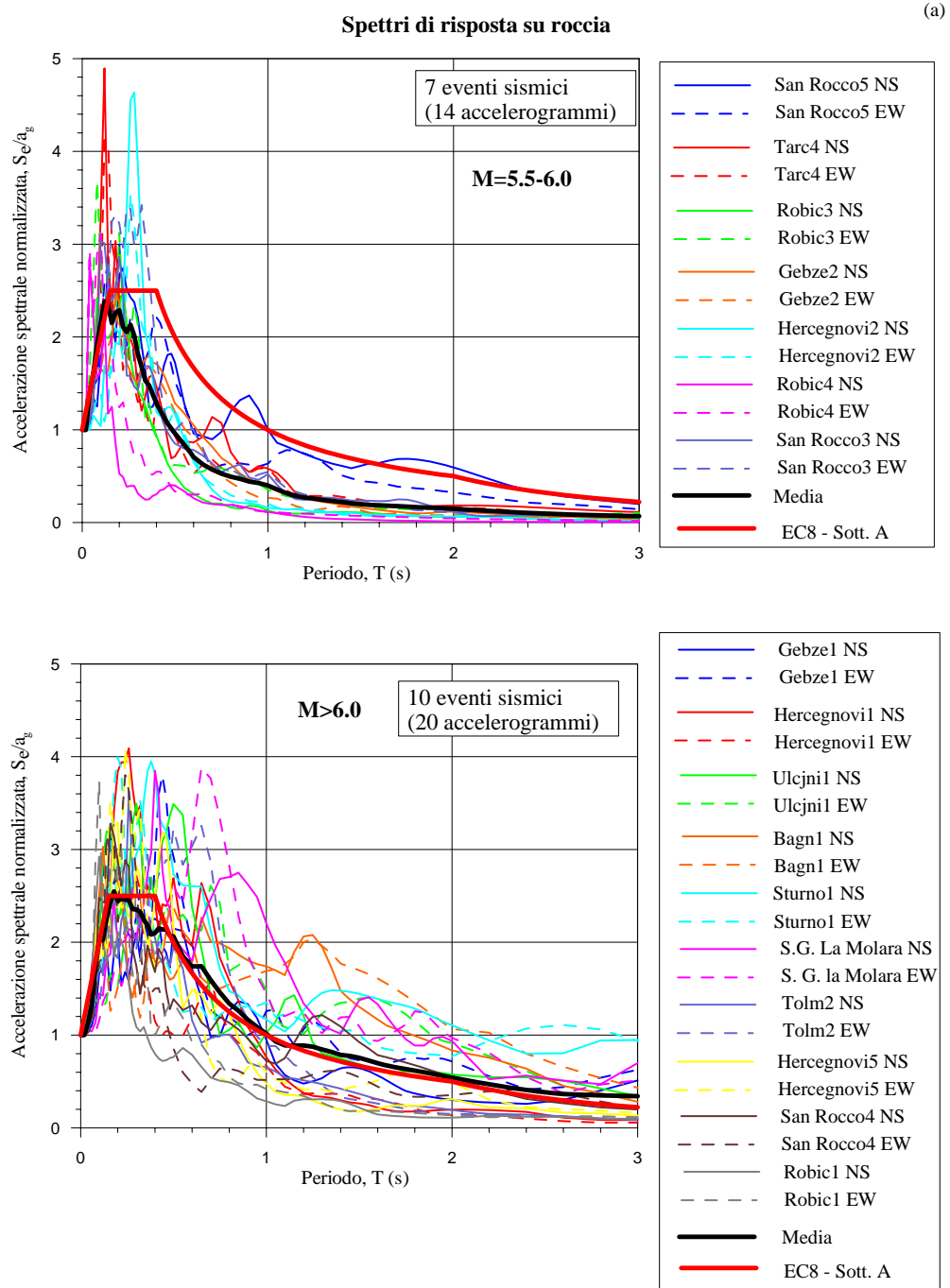


Figura 7 spettro di risposta per accelerogrammi reali a confronto con il loro spettro medio

e lo spettro normativo su roccia per terremoti intensi (Tipo 1)

Gli spettri di risposta sopra illustrati si riferiscono ad accelerogrammi registrati su roccia selezionati (vedi Rey et al. 2002)¹ dallo European Strong Motion Database, con particolare riferimento a quelli relativi ai terremoti del Friuli, Montenegro e Izmit. Gli accelerogrammi sono stati normalizzati dividendo le ordinate per il picco di accelerazione, pertanto l'ordinata dello spettro di risposta al periodo proprio $T=0$ vale 1.

Una operazione che spesso viene effettuata per ricavare spettri di progetto è quella di fare la statistica di spettri di risposta rappresentativi, con qualche criterio, della situazione di interesse. Una analogia di minimo è quella delle caratteristiche di intensità epicentrale, e di situazione geologica e geotecnica del sito ove si vuol valutare lo spettro.

Nelle figure sono mostrati anche gli spettri ottenuti mediando quelli relativi ai diversi accelerogrammi. Si ottengono così forme più regolari di quelle relative ai singoli accelerogrammi. Si noti come a intensità epicentrale maggiori (in magnitudo), riportati nella figura inferiore, corrispondano accelerogrammi con spettri di risposta con la zona di massima amplificazione più estesa. Questa situazione è rilevabile in modo pressoché sistematico. Pertanto è da attendersi che gli spettri su roccia relativi a zone di pericolosità sismica inferiore, cioè quelle ove l'azione sismica attesa è minore, dovrebbero avere una estensione della zona di massima amplificazione minore.

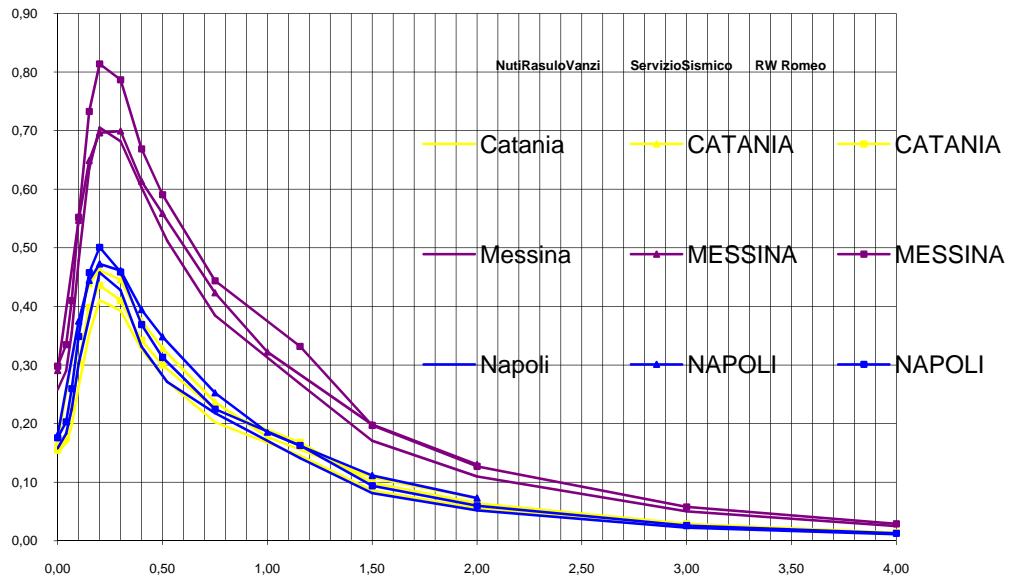
¹ Rey J. , Faccioli E., Bommer J. (2002). Derivation of design soil coefficients (S) and response spectra shapes for eurocode 8 using the European Strong Motion Database. *Journal of Seismology*, 547-555

1.2.2 Spettri di risposta ricavati a partire dalle caratteristiche di sismicità regionale

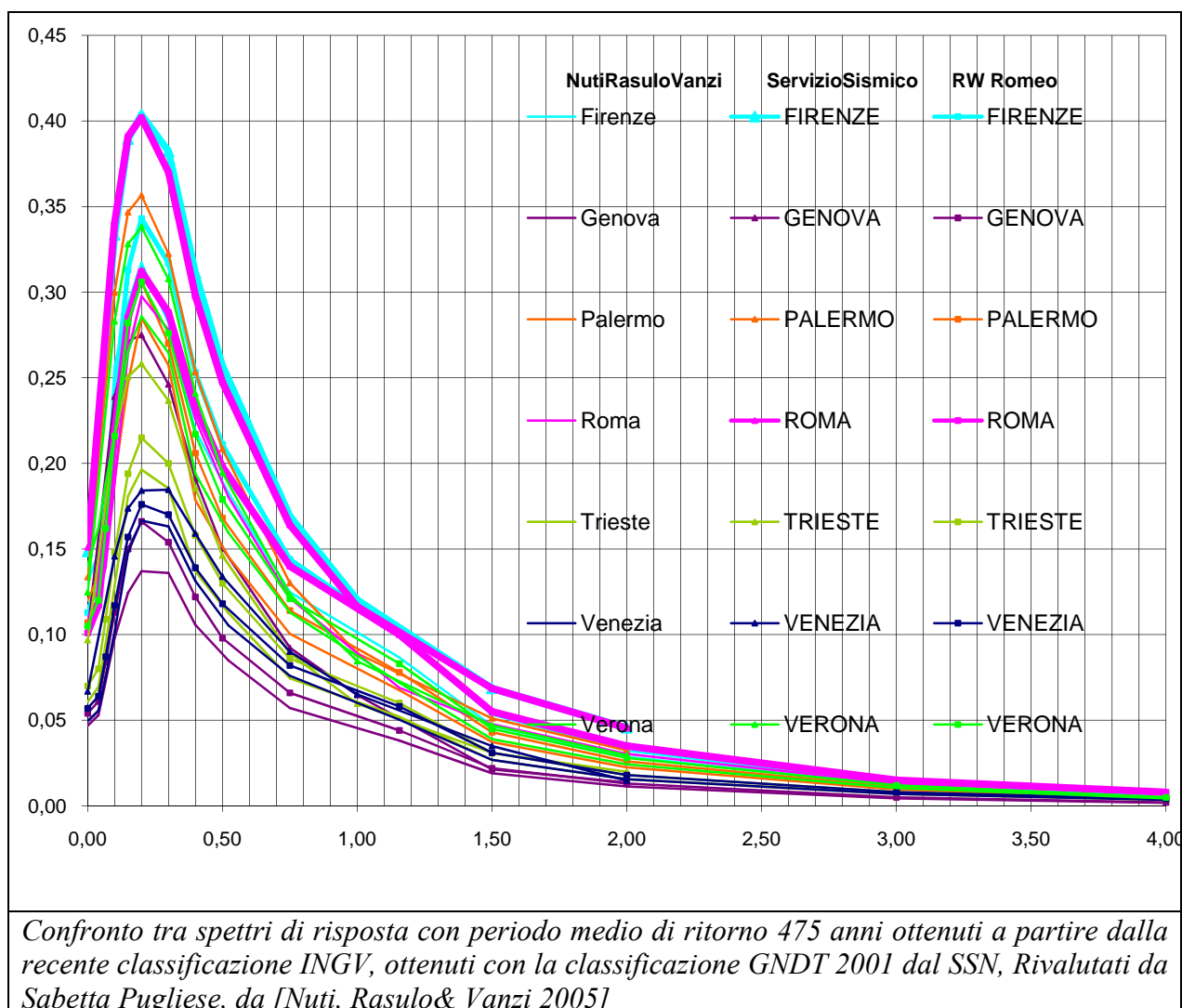
Dato l' epicentro di un terremoto di nota intensità sono state messe a punto per via statistica funzioni, dette leggi di attenuazione, che a partire dalle caratteristiche di intensità epicentrale, danno, in base alla distanza del sito ove si vuole valutare lo spettro di risposta, il valore delle ordinate spettrali medie. Con opportune operazioni di media si possono così calcolare, a partire dalle caratteristiche di sismicità locale, spettri di risposta di sito, in genere su roccia, sempre su terreno a superficie orizzontale, che tengono conto delle caratteristiche di sismicità del territorio circostante.

A titolo di esempio si riportano i valori ricavati per alcune città Italiane [Nuti, Rasulo & Vanzi, 2005]².

² Nuti, C., Rasulo, A., Vanzi, I., (2005) "Proposta per la Valutazione della Classificazione Sismica del Territorio Italiano" Rapporto Tecnico NI/2005 Dipartimento di Strutture Università degli Studi RomaTre.



Messina, Zona 1°, Catania e Napoli, Zona 2°, Confronto tra spettri di risposta $T=475$ anni ottenuti a partire dalla recente classificazione INGV, ottenuti con la classificazione GNDT 2001 dal SSN, Rivalutati da Sabetta Pugliese da [Nuti, Rasulo & Vanzi 2005]



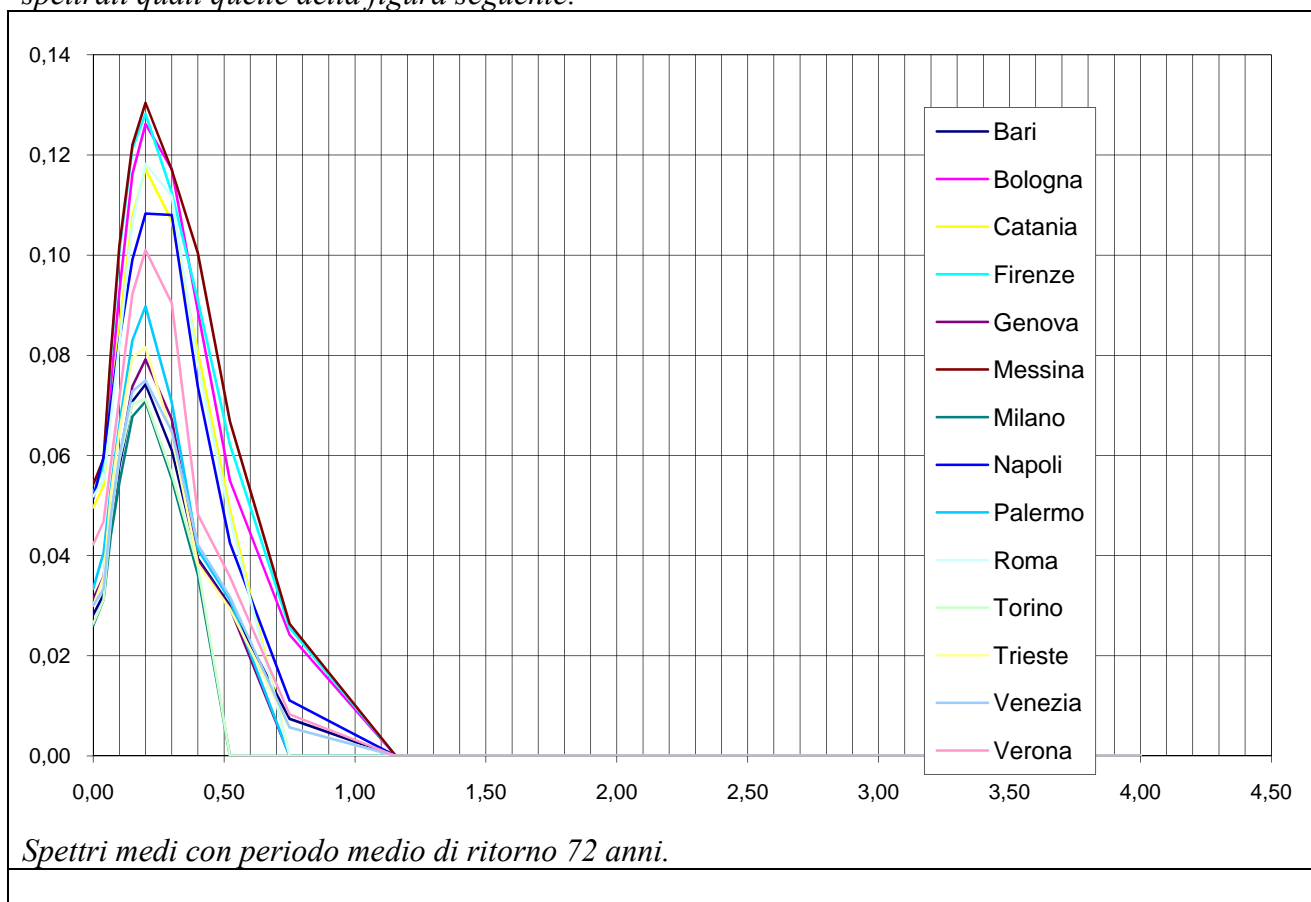
La tecnica più diffusa per la valutazione statistica a partire dai dati di sismicità del territorio è quella messa a punto da Cornell nel 1969. Per un approfondimento si rimanda a testi più specializzati.

Le forme spettrali così ottenute dipendono oltre che dalle leggi di attenuazione dalla definizione delle caratteristiche della sismicità regionale. Si noti ad esempio che gli spettri ottenuti con la recente classificazione dell'INGV 2004, sono più bassi di quelli ottenuti a partire dalla precedente classificazione del GNDT 2001.

Si noti come le forme spettrali così ottenute sono anch'esse piuttosto regolari, e presentano una certa analogia con quelle ottenute con operazioni di media di spettri di accelerogrammi naturali.

La cosa è d'altronde da attendersi in quanto le leggi di attenuazione sono ricavate per via statistica dalle registrazione degli accelerogrammi naturali.

Se invece degli spettri con periodo medio di ritorno 475 anni si valutano quelli con periodo 72 anni, corrispondenti a probabilità di superamento del 50% in 5° anni, si possono ottenere forme spettrali quali quelle della figura seguente:



1.2.3 Spettri di risposta risposta di norma

Le normative nazionali ed internazionali definiscono in genere le forme spettrali in relazione alle caratteristiche delle formazioni più superficiali del terreno. Ad esempio l'Eurocodice 8 fa riferimento alle caratteristiche degli strati sino a 30 metri di profondità. Questa profondità non ha un particolare valore scientifico, piuttosto rappresenta un valore sino al quale si spingono i sondaggi che si effettuano per la valutazione delle caratteristiche geotecniche dei terreni di fondazione quando si deve costruire un edificio. Il fondamento scientifico si basa sulla valutazione che spesso a 30 metri di profondità gli strati di terreno divengono molto compatti per cui non ha interesse pratico indagare le caratteristiche a profondità più grandi.

Qualora le caratteristiche del terreno siano di qualità scadente a profondità maggiori, è pertanto opportuno fare studi specifici.

E' tuttavia ormai riconosciuto che le forme spettrali attese in un sito specifico dipendono non solo dalle caratteristiche degli strati superficiali, ma anche dalle caratteristiche alla sorgente sismica e dai terreni attraversati. Pertanto si ritiene che sia quantomeno opportuno che le forme spettrali vengano definite a livello regionale attraverso studi specifici che tengano conto di tutti i possibili parametri, non ultimo la morfologia locale.

L' Eurocodice 8 dà la seguente espressione per lo spettro elastico di progetto:

$$0 \leq T \leq T_B : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right]$$

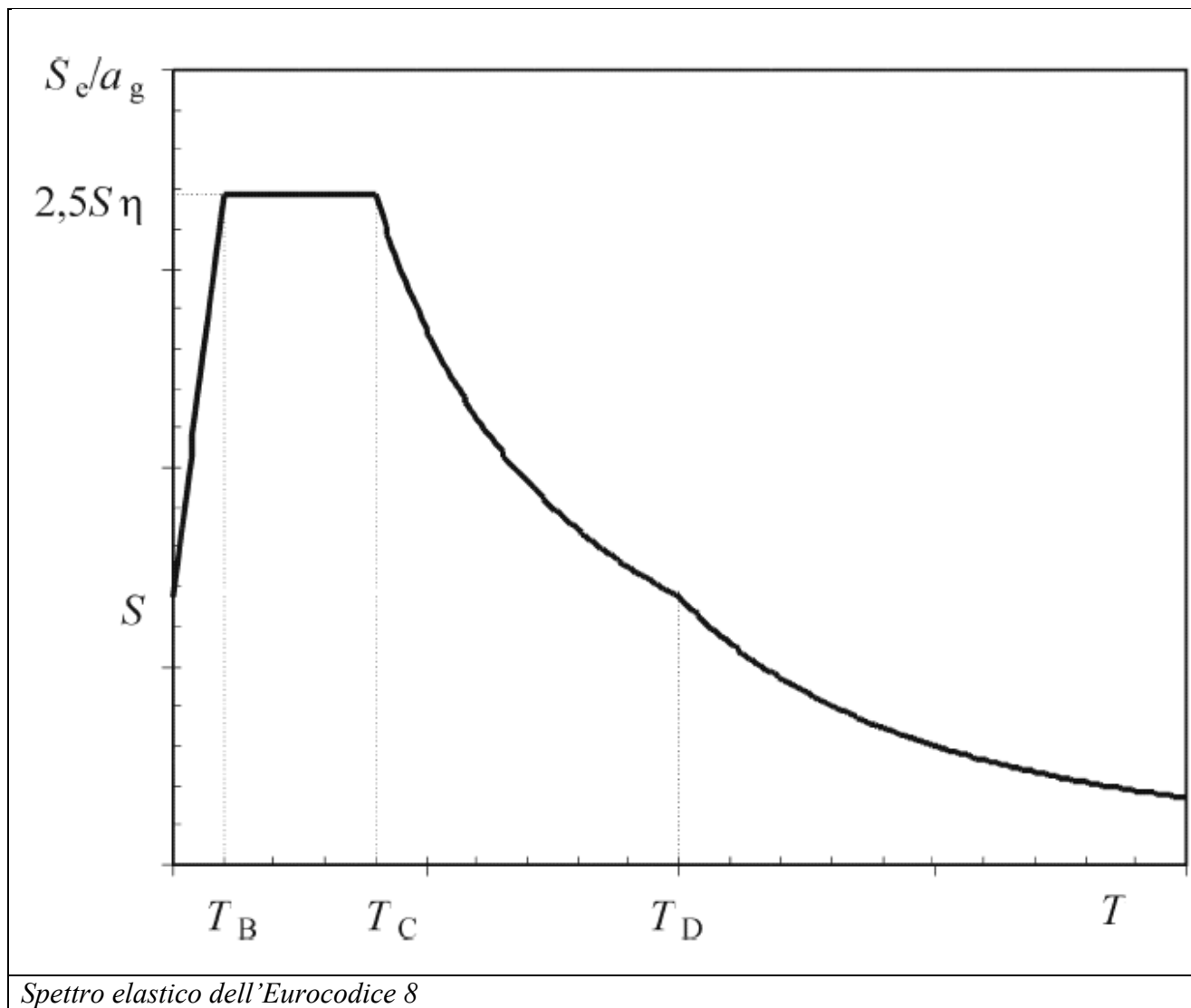
$$T_B \leq T \leq T_C : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5$$

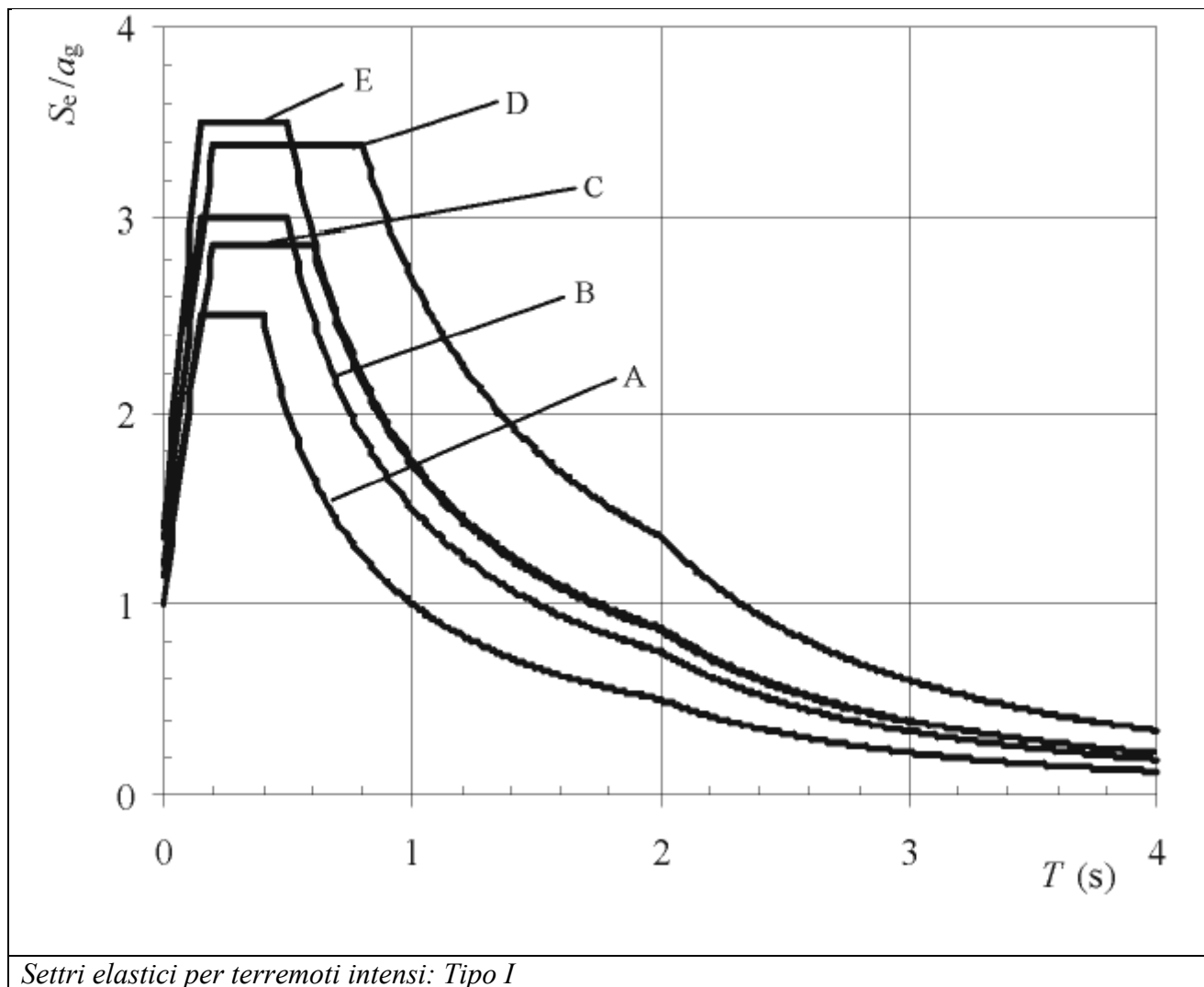
$$T_C \leq T \leq T_D : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \left[\frac{T_C}{T} \right]$$

$$T_D \leq T \leq 4s : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \left[\frac{T_C T_D}{T^2} \right]$$

$$\eta = \sqrt{10 / (5 + \xi)} \geq 0,55$$

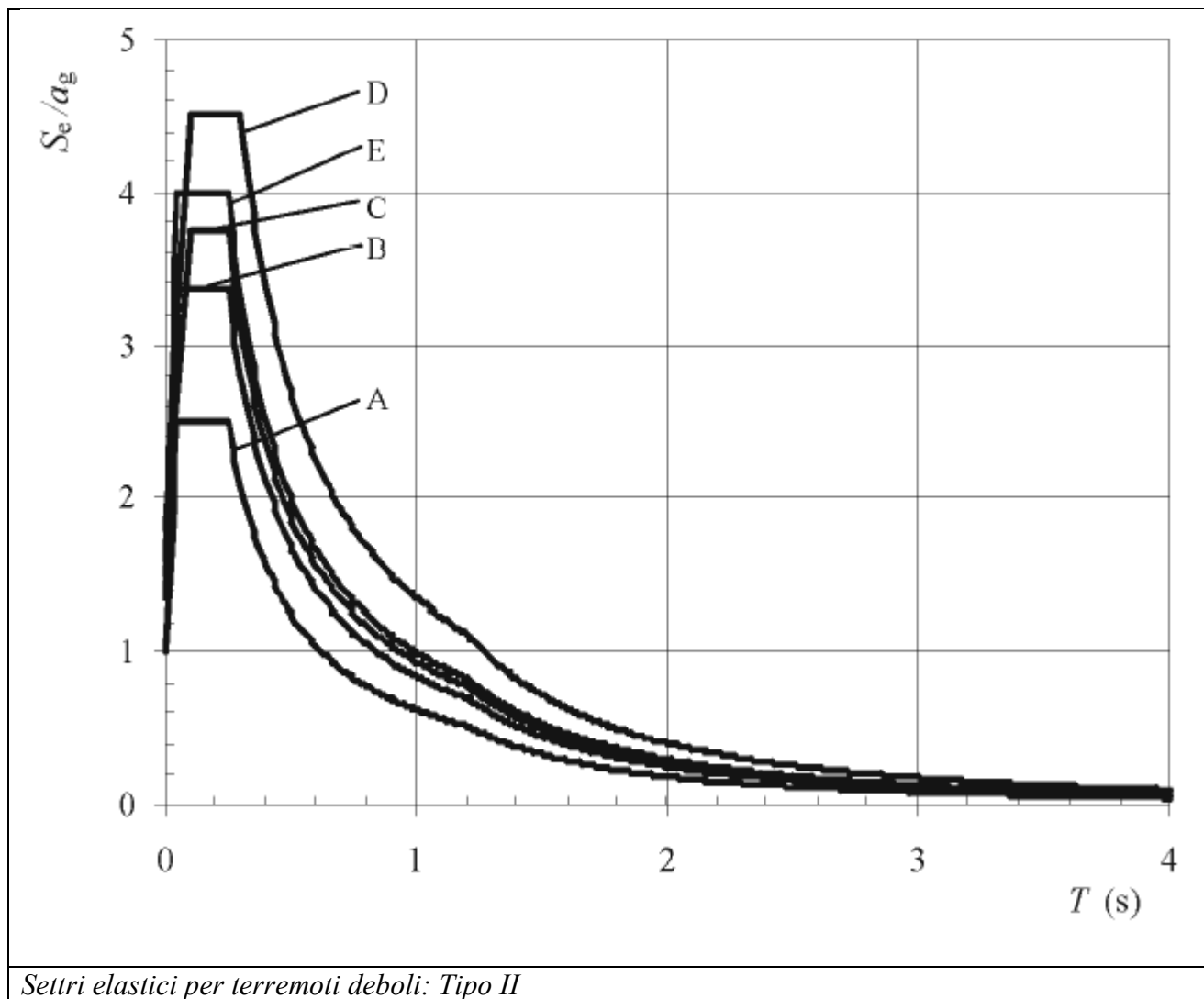
ξ : smorzamento spettrale





Ground type	S	T_B (s)	T_C (s)	T_D (s)
A	1,0	0,15	0,4	2,0
B	1,2	0,15	0,5	2,0
C	1,15	0,20	0,6	2,0
D	1,35	0,20	0,8	2,0
E	1,4	0,15	0,5	2,0

Valori dei parametri nell'EC8, terremoti intensi: Tipo I



Ground type	S	T_B (s)	T_C (s)	T_D (s)
A	1,0	0,05	0,25	1,2
B	1,35	0,05	0,25	1,2
C	1,5	0,10	0,25	1,2
D	1,8	0,10	0,30	1,2
E	1,6	0,05	0,25	1,2

Valori dei parametri nell'EC8, terremoti deboli: Tipo II

La proposta di annesso tecnico nazionale dell'EC8, di gennaio 2005, riporta i seguenti valori dei parametri

Zona sismica	Categoria suolo	S	T_B	T_C	T_D
1-2	A	1,00	0,10	0,40	4,50
	B	1,15	0,15	0,60	5,00
	C-D-E	1,30	0,20	0,80	6,00
3, 4	A	1,00	0,05	0,35	1,50
	B	1,20	0,10	0,45	1,50
	C-D-E	1,35	0,15	0,60	2,00

Valori dei parametri dello spettro di risposta elastico della **componente verticale** di accelerazione per lo **SLU**

Zona sismica	Categoria suolo	S	T_B	T_C	T_D
1-2	A	1,00	0,10	0,40	4,50
	B	1,15	0,15	0,60	5,00
	C-D-E	1,30	0,20	0,80	6,00
3, 4	A	1,00	0,05	0,35	1,50
	B	1,20	0,10	0,45	1,50
	C-D-E	1,35	0,15	0,60	2,00

Valori dei parametri dello spettro di risposta elastico delle **componenti orizzontali** di accelerazione per lo **SLD**

Lo spettro di risposta relativo alla componente verticale è generalmente concentrato su frequenze più elevate di quello per le componenti orizzontali.

L'Eurocodice 8 dà le seguenti espressioni:

$$0 \leq T \leq T_B : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 3,0 - 1) \right]$$

$$T_B \leq T \leq T_C : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0 \left[\frac{T_C}{T} \right]$$

$$T_D \leq T \leq 4s : S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0 \left[\frac{T_C \cdot T_D}{T^2} \right]$$

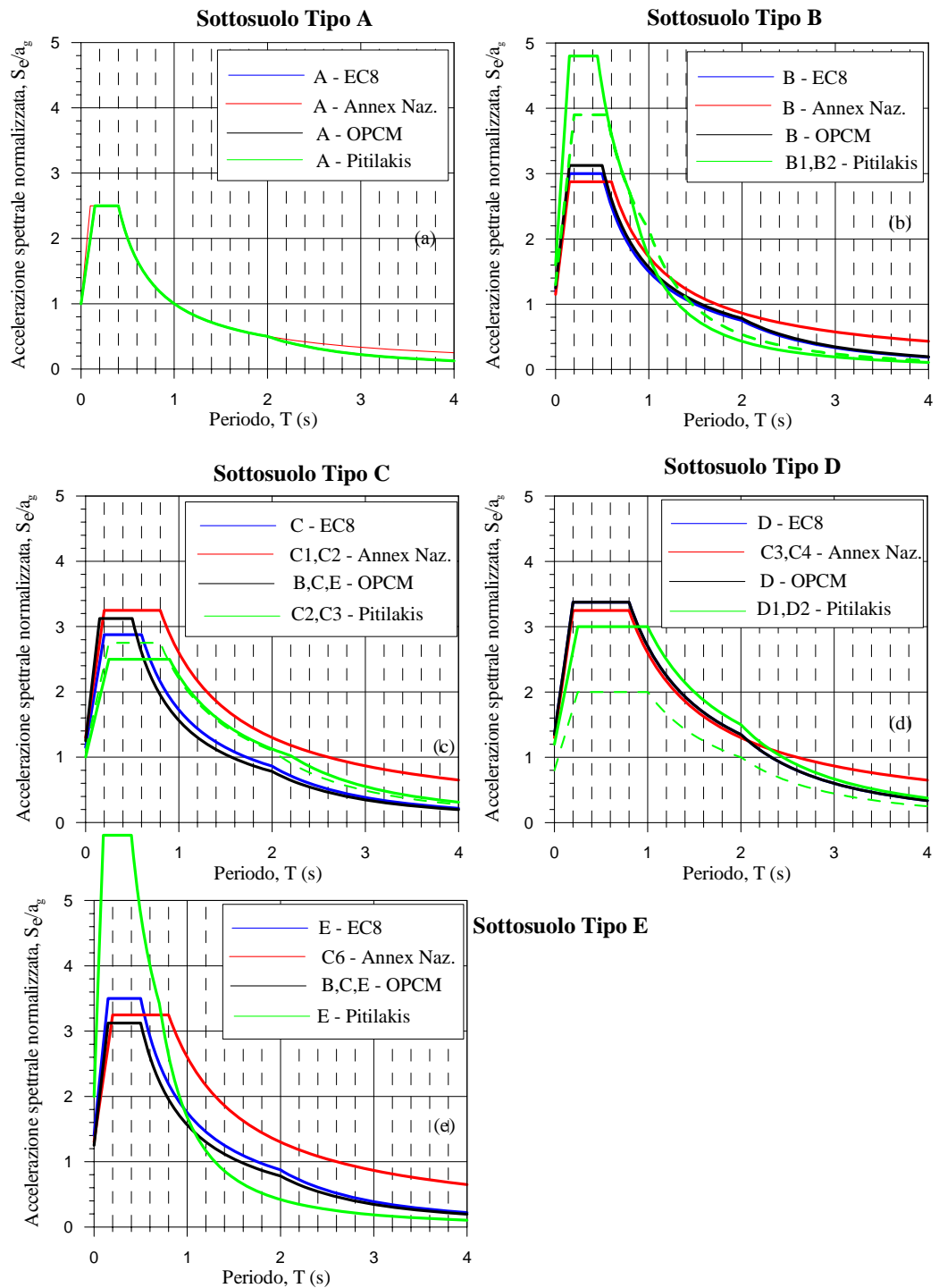
I parametri sono dati nella seguente tabella:

Spectrum	a_{vg}/a_g	T_B (s)	T_C (s)	T_D (s)
Type 1	0,90	0,05	0,15	1,0
Type 2	0,45	0,05	0,15	1,0

Nell'annesso tecnico nazionale si danno i gli stessi valori.

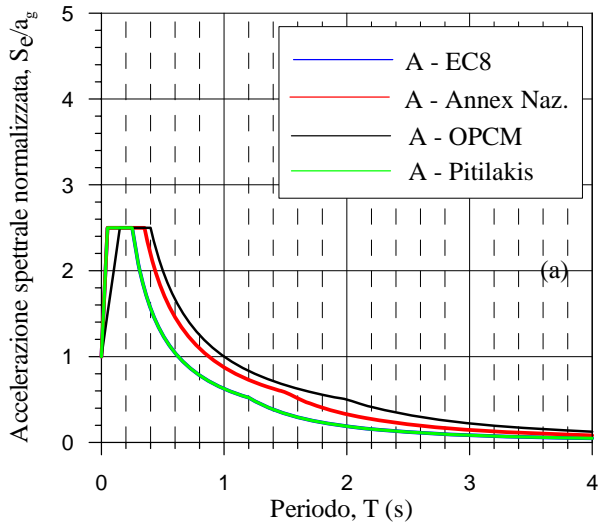
1.2.4 Confronto tra spettri normativi ed alcune proposte in letteratura

Confronti EC8 / Annex Italiano / OPCM 3274/Pitilakis Terremoti Tipo 1

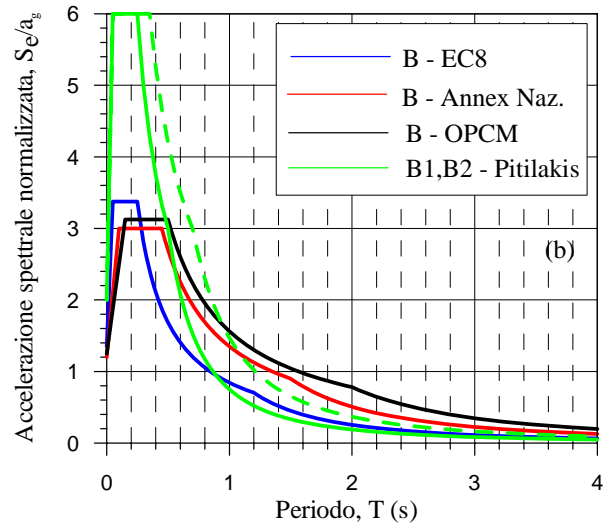


Confronti EC8 / Annex Italiano / OPCM 3274/Pitilakis Terremoti Tipo 2

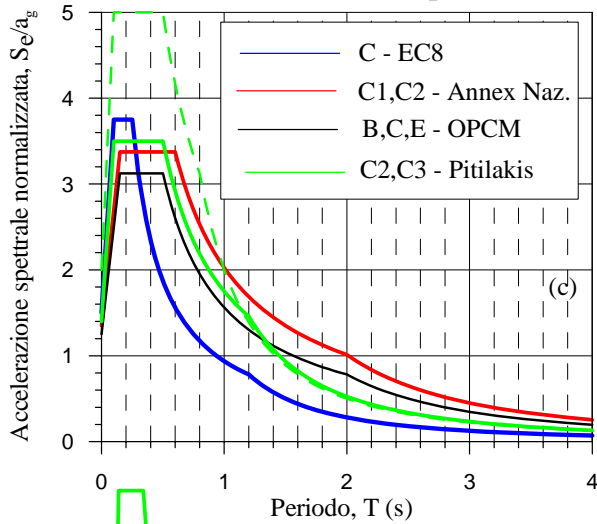
Sottosuolo Tipo A



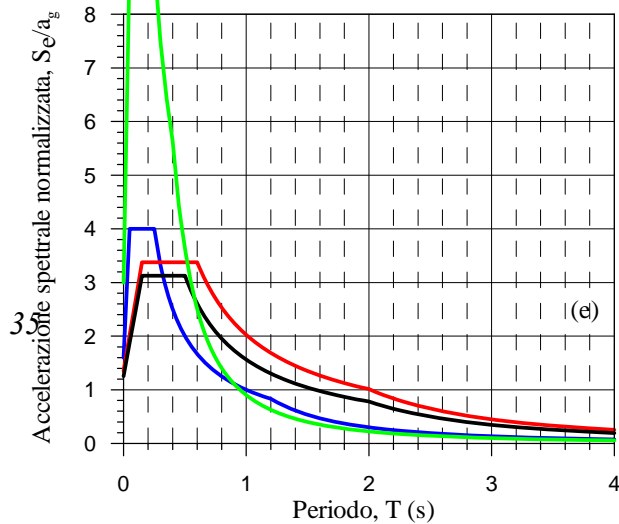
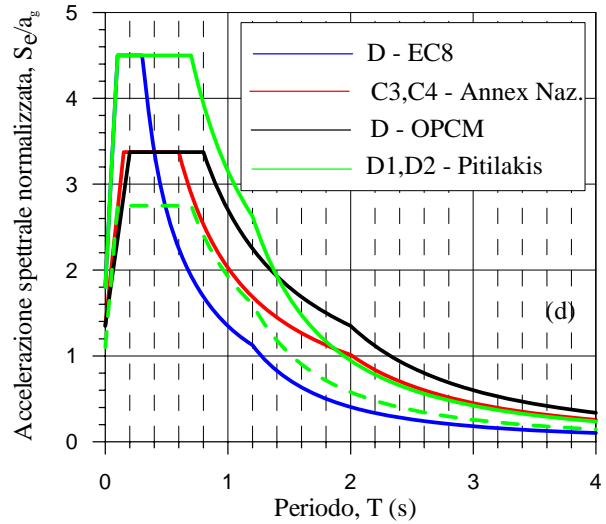
Sottosuolo Tipo B



Sottosuolo Tipo C



Sottosuolo Tipo D



Sottosuolo Tipo E

1.2.5 Testo della Ordinanza della Protezione Civile 3274 relativo alla definizione della Azione Sismica

Si riporta il testo dell'allegato tecnico alla Ordinanza di Protezione Civile 3274. Si tratta di una formulazione simile a quella dell'EC8 e relativi Annessi tecnici nazionali. Per questi ultimi si veda anche il sito Web: www.coordinatore.it.

3. AZIONE SISMICA

3.1 Categorie di suolo di fondazione

Ai fini della definizione della azione sismica di progetto si definiscono le seguenti categorie di profilo stratigrafico del suolo di fondazione (le profondità si riferiscono al piano di posa delle fondazioni, i valori da utilizzare per V_s , NSPT e c_u sono valori medi):

- A - *Formazioni litoidi o suoli omogenei molto rigidi* caratterizzati da valori di V_{s30} superiori a 800 m/s, comprendenti eventuali strati di alterazione superficiale di spessore massimo pari a 5 m.
- B - *Depositi di sabbie o ghiaie molto addensate o argille molto consistenti*, con spessori di diverse decine di metri, caratterizzati da un graduale miglioramento delle proprietà meccaniche con la profondità e da valori di V_{s30} compresi tra 360 m/s e 800 m/s (ovvero resistenza penetrometrica $N_{SPT} > 50$, o coesione non drenata $c_u > 250$ kPa).
- C - *Depositi di sabbie e ghiaie mediamente addensate, o di argille di media consistenza*, con spessori variabili da diverse decine fino a centinaia di metri, caratterizzati da valori di V_{s30} compresi tra 180 e 360 m/s ($15 < N_{SPT} < 50$, $70 < c_u < 250$ kPa).
- D - *Depositi di terreni granulari da sciolti a poco addensati oppure coesivi da poco a mediamente consistenti*, caratterizzati da valori di $V_{s30} < 180$ m/s ($N_{SPT} < 15$, $c_u < 70$ kPa).
- E - *Profili di terreno costituiti da strati superficiali alluvionali*, con valori di V_{s30} simili a quelli dei tipi C o D e spessore compreso tra 5 e 20 m, giacenti su di un substrato di materiale più rigido con $V_{s30} > 800$ m/s.

In aggiunta a queste categorie, per le quali nel punto 3.2 vengono definite le azioni sismiche da considerare nella progettazione, se ne definiscono altre due, per le quali sono richiesti studi speciali per la definizione dell'azione sismica da considerare:

S1 - Depositi costituiti da, o che includono, uno strato spesso almeno 10 m di argille/limi di bassa consistenza, con elevato indice di plasticità ($PI > 40$) e contenuto di acqua, caratterizzati da valori di $V_{s30} < 100$ m/s ($10 < c_u < 20$ kPa)

S2 - Depositi di terreni soggetti a liquefazione, di argille sensitive, o qualsiasi altra categoria di terreno non classificabile nei tipi precedenti

Nelle definizioni precedenti V_{s30} è la velocità media di propagazione entro 30 m di profondità delle onde di taglio e viene calcolata con la seguente espressione:

$$V_{s30} = \frac{30}{\sum_{i=1,N} \frac{h_i}{V_i}} \quad (3.1)$$

dove h_i e V_i indicano lo spessore (in m) e la velocità delle onde di taglio (per deformazioni di taglio $\gamma < 10^{-6}$) dello strato i -esimo, per un totale di N strati presenti nei 30 m superiori.

Il sito verrà classificato sulla base del valore di V_{s30} , se disponibile, altrimenti sulla base del valore di N_{SPT} .

3.2 Calcolo dell'azione sismica

3.2.1 Zone sismiche

Ai fini dell'applicazione di queste norme, il territorio nazionale viene suddiviso in zone sismiche, ciascuna contrassegnata da un diverso valore del parametro a_g = accelerazione orizzontale massima su suolo di categoria A (definito al punto 3.1), **con probabilità di superamento del 10% in 50 anni**. I valori di a_g , espressi come frazione dell'accelerazione di gravità g , da adottare in ciascuna delle zone sismiche del territorio nazionale sono, salvo più accurate determinazioni, che possono portare a differenze comunque non superiori al 20% **dell'accelerazione per le zone 1 e 2 e non superiori a 0.05g nelle altre zone**:

Zona	Valore di a_g
1	0,35g
2	0,25g
3	0,15g
4	0,05g

3.2.2 Descrizione dell'azione sismica

Il modello di riferimento per la descrizione del moto sismico in un punto della superficie del suolo è costituito dallo spettro di risposta elastico di cui al punto 3.2.3. Qualora siano eseguite determinazioni più accurate del moto sismico atteso, corrispondenti alle probabilità di superamento definite in 2.1 e 2.2, è consentito utilizzare spettri specifici per il sito purché le ordinate di tali spettri non risultino in nessun punto del campo di periodi di interesse inferiori all'80% delle ordinate dello spettro elastico standard (p. 3.2.3) applicabile in relazione alla categoria di suolo (p. 3.1).

Per applicazioni particolari, il moto del suolo può essere descritto mediante accelerogrammi, secondo quanto indicato al punto 3.2.7.

Il moto orizzontale è considerato composto da due componenti ortogonali indipendenti, caratterizzate dallo stesso spettro di risposta.

In mancanza di documentata informazione specifica, la componente verticale del moto sismico si considera rappresentata da uno spettro di risposta elastico diverso da quello delle componenti orizzontali, come specificato in 3.2.3.

3.2.3 Spettro di risposta elastico

Lo spettro di risposta elastico è costituito da una forma spettrale (spettro normalizzato), considerata indipendente dal livello di sismicità, moltiplicata per il valore della accelerazione massima (a_g) del terreno che caratterizza il sito.

Lo spettro di risposta elastico della componente orizzontale è definito dalle espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} 0 \leq T < T_B & S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \left(1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right) \\ T_B \leq T < T_C & S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \\ T_C \leq T < T_D & S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \cdot \left(\frac{T_C}{T} \right) \\ T_D \leq T & S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \cdot \left(\frac{T_C T_D}{T^2} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

nelle quali:

S fattore che tiene conto del profilo stratigrafico del suolo di fondazione (vedi punto 3.1);

Per strutture con fattore di importanza $\gamma > 1$, di cui al paragrafo 4.7, erette sopra o in vicinanza di pendii con inclinazione $> 15^\circ$ e dislivello superiore a circa 30 metri, l'azione sismica dell'equazione (3.2) dovrà essere incrementata moltiplicandola per un coefficiente di amplificazione topografica S_T . In assenza di studi specifici si potranno utilizzare per S_T i seguenti valori:

- $S_T = 1,2$ per siti in prossimità del ciglio superiore di pendii scoscesi isolati;
- $S_T = 1,4$ per siti prossimi alla sommità di profili topografici aventi larghezza in cresta molto inferiore alla larghezza alla base e pendenza media $> 30^\circ$;
- $S_T = 1,2$ per siti del tipo b) ma con pendenza media inferiore.

Il prodotto $S \cdot S_T$ può essere assunto non superiore a 1.6.

η fattore che tiene conto di un coefficiente di smorzamento viscoso equivalente ξ diverso da 5 ($\eta=1$ per $\xi=5$), essendo ξ espresso in percentuale :

$$\eta = \sqrt{10/(5 + \xi)} \geq 0,55 \quad (3.3)$$

T periodo di vibrazione dell'oscillatore semplice;

T_B, T_C, T_D periodi che separano i diversi rami dello spettro, dipendenti dal profilo stratigrafico del suolo di fondazione.

I valori di T_B, T_C, T_D e S da assumere, salvo più accurate determinazioni, per le componenti orizzontali del moto e per le categorie di suolo di fondazione definite al punto 3.1, sono riportati nella Tabella 3.1.

Tabella 3.1 - Valori dei parametri nelle espressioni (3.2) dello spettro di risposta elastico delle componenti orizzontali

Categoria suolo	S	T_B	T_C	T_D
A	1,0	0,15	0,40	2,0
B, C, E	1,25	0,15	0,50	2,0
D	1,35	0,20	0,80	2,0

Lo spettro di risposta elastico della componente verticale è definito dalle espressioni seguenti:

$$\begin{aligned}
 0 \leq T < T_B & \quad S_{ve}(T) = 0,9 a_g \cdot S \cdot \left(1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 3,0 - 1) \right) \\
 T_B \leq T < T_C & \quad S_{ve}(T) = 0,9 a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 3,0 \\
 T_C \leq T < T_D & \quad S_{ve}(T) = 0,9 a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 3,0 \cdot \left(\frac{T_C}{T} \right) \\
 T_D \leq T & \quad S_{ve}(T) = 0,9 a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 3,0 \cdot \left(\frac{T_C T_D}{T^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

con i valori dei parametri che definiscono la forma spettrale riportati in tabella 3.2.

Tabella 3.2 - Valori dei parametri dello spettro di risposta elastico della componente verticale

Categoria suolo	S	T_B	T_C	T_D
A, B, C, D, E	1,0	0,05	0,15	1,0

Lo spettro di risposta elastico dello spostamento potrà ottenersi per trasformazione diretta dello spettro di risposta elastico delle accelerazioni, usando la seguente espressione:

$$S_{De}(T) = S_e(T) \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \tag{3.5}$$

Gli spettri sopra definiti potranno essere applicati per periodi di vibrazione che non eccedono 4,0 s. Per periodi superiori lo spettro dovrà essere definito da appositi studi.

Nei casi in cui non si possa valutare adeguatamente l'appartenenza del profilo stratigrafico del suolo di fondazione ad una delle categorie di cui al punto 3.1, ed escludendo comunque i profili di tipo S1 e S2, si adotterà in generale la categoria D o, in caso di incertezza di attribuzione tra due categorie, la condizione più cautelativa.

3.2.4 Spostamento e velocità del terreno

I valori dello spostamento e della velocità orizzontali massimi del suolo (d_g) e (v_g) sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 d_g &= 0,025 \cdot S \cdot T_C \cdot T_D \cdot a_g \\
 v_g &= 0,16 \cdot S \cdot T_C \cdot a_g
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2.5 Spettri di progetto per lo stato limite ultimo

Ai fini del progetto, le capacità dissipative delle strutture possono essere messe in conto attraverso un fattore riduttivo delle forze elastiche, denominato fattore di struttura q . L'azione sismica di progetto $S_d(T)$ è in tal caso data dallo spettro di risposta elastico di cui al punto 3.2.3, con le ordinate ridotte utilizzando il fattore q . I valori numerici del fattore q vengono definiti in funzione dei materiali e delle tipologie strutturali, come indicato successivamente nelle presenti norme.

Lo spettro di progetto per le componenti orizzontali è definito dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 0 \leq T < T_B & S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot \left(\frac{2,5}{q} - 1 \right) \right] \\
 T_B \leq T < T_C & S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \\
 T_C \leq T < T_D & S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \left(\frac{T_C}{T} \right) \\
 T_D \leq T & S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \left(\frac{T_C T_D}{T^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

in cui T_B , T_C , T_D sono definiti in tab. 3.1. Si assumerà comunque $S_d(T) \geq 0,2a_g$.

A meno di adeguate analisi giustificative, lo spettro di progetto della componente verticale dell'azione sismica è dato dalle seguenti espressioni, assumendo $q = 1,5$ per qualunque tipologia strutturale e di materiale:

$$\begin{aligned}
 0 \leq T < T_B & S_{vd}(T) = 0,9 \cdot a_g \cdot S \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot \left(\frac{3,0}{q} - 1 \right) \right] \\
 T_B \leq T < T_C & S_{vd}(T) = 0,9 \cdot a_g \cdot S \cdot \frac{3,0}{q} \\
 T_C \leq T < T_D & S_{vd}(T) = 0,9 \cdot a_g \cdot S \cdot \frac{3,0}{q} \cdot \left(\frac{T_C}{T} \right) \\
 T_D \leq T & S_{vd}(T) = 0,9 \cdot a_g \cdot S \cdot \frac{3,0}{q} \cdot \left(\frac{T_C T_D}{T^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

in cui T_B , T_C , T_D sono definiti in tab. 3.2. Tutti i simboli mantengono significato e valore numerico definiti nel caso dello spettro di risposta elastico

3.2.6 Spettro di progetto per lo stato limite di danno

Se non si esegue una puntuale valutazione dell'azione sismica corrispondente alla probabilità di superamento di cui al punto 2.2, lo spettro di progetto da adottare per la limitazione dei danni può essere ottenuto riducendo lo spettro elastico di cui al punto 3.2.3 secondo un fattore pari a 2,5.

1.3 Oscillatore Semplice: Soluzione nel caso in cui il termine noto è una forza cosinusoidale

L'espressione d'equilibrio della massa del sistema, in assenza di smorzamento, è la seguente:

$m\ddot{x} + d \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cos \Omega t$ $\ddot{x} + 2\nu\omega \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$	(29
--	------

Ove Ω rappresenta la frequenza della eccitazione esterna. In questo caso la soluzione dell'equazione differenziale è la somma dell'integrale generale (uguale a quello trovato nel caso di oscillazioni libere) e dell'integrale particolare che varia nel tempo con la stessa frequenza della eccitazione esterna indipendentemente dalla struttura:

$x = e^{-\nu\omega t} [A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t] + [A_1 \cos \Omega t + B \sin \Omega t]$	(30
--	------

Nella espressione (23 il primo termine della addizione è l'integrale generale, esso all'aumentare di t tende a zero, la legge del moto a regime, quindi, sarà rappresentata dal integrale particolare:

$x(t) = [A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t]$	(31
--	------

Basterà allora calcolarsi I valori delle costanti A_1 e B_1 . Si deriva quindi due volte l'integrale particolare ricavando le espressioni di della velocità e accelerazioni relative in funzione delle costanti A_1 e B_1 incognite. Queste espressioni, sostituite ai vi valori nella equazione differenziale, ci permettono di calcolare lare i valori di A_1 e B_1 che la soddisfano.

$A_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\nu^2\omega\Omega}$ $B_1 = \frac{F_0}{m} \frac{2\nu\omega\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\nu^2\omega\Omega}$	(32
--	------

Sostituendo queste espressioni nell'integrale particolare si ha la soluzione:

$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\nu^2 \omega \Omega}} \cos(\Omega t - \phi)$ $x(t) = \frac{F_0}{m} M(\nu, \omega, \Omega) \cdot \cos(\Omega t - \phi)$ $M(\nu, \omega, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\nu^2 \omega \Omega}} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ $\phi = \text{artg}\left(\frac{B_1}{A_1}\right) = \frac{2\nu \omega \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)}$	(33
--	------

Ove la funzione $M(\nu, \omega, \Omega)$ è detta funzione di trasferimento, ϕ è l'angolo di sfasamento della risposta.

Si vede, quindi, che l'ampiezza della risposta \mathcal{C} direttamente proporzionale all'intensità della eccitazione ma dipende anche, tramite la funzione di trasferimento dalla frequenza dell'eccitazione, da quella della struttura, dallo smorzamento.

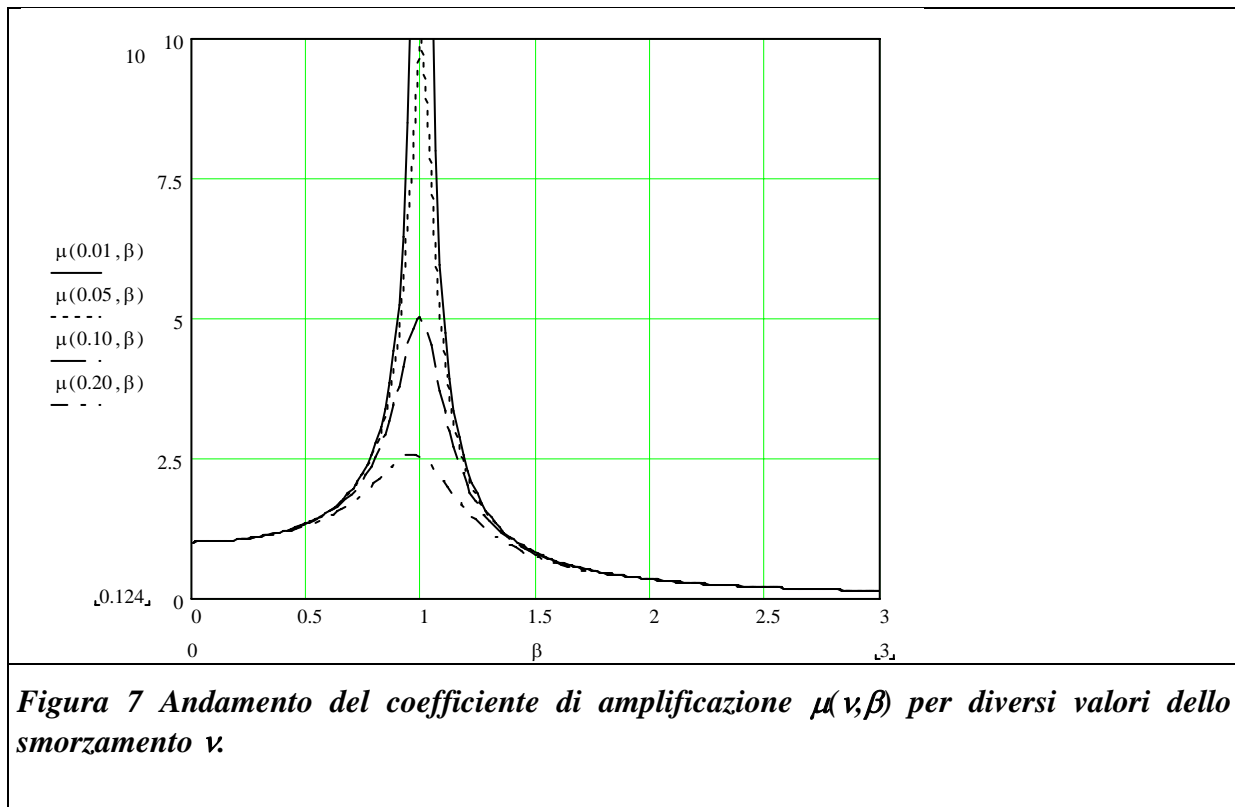
Esplicitando la funzione $M(\cdot)$ si ha:

$M(\nu, \omega, \Omega) = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + 4\nu^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2}}}$ $\beta = \frac{\Omega^2}{\omega^2}$ $M(\nu, \omega, \Omega) = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\nu^2 \beta^2}} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \mu(\nu, \beta)$ $\mu(\nu, \beta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\nu^2 \beta^2}}$	(34
--	------

sostituendo questa nuova funzione nell'espressione della risposta (33 si ottiene:

$x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2} \cdot \mu(\nu, \beta) \cdot \cos(\Omega t - \phi) =$ $x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{m}{k} \cdot \mu(\nu, \beta) \cdot \cos(\Omega t - \phi) =$	(35
--	------

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \cdot \mu(\nu, \beta) \cdot \cos(\Omega t - \phi) = x_{st} \cdot \mu(\nu, \beta) \cdot \cos(\Omega t - \phi)$$



Dalla terza delle (35 si può dare una interpretazione della risposta dinamica. Essa è data essenzialmente dalla stessa espressione della risposta statica, rapporto tra forza e rigidezza k , sfasata rispetto alla applicazione della forza di un tempo $t=\phi/\Omega$, ed amplificata di un fattore pari a $\mu(\nu, \beta)$ detto per questo "funzione di amplificazione dinamica".

La funzione di amplificazione dinamica dipende dallo smorzamento e dal rapporto tra la frequenza eccitatrice e quella della struttura.

Se $\beta=0$ si ha il caso di forza statica ($\Omega=0$) o di struttura infinitamente rigida ($\omega=\infty$). Il valore di $\mu(\nu, \beta=0)$ vale 1. Se $\beta=\infty$, si ha il caso struttura molto flessibile con periodo proprio molto lungo ($\omega=0$) o di eccitazione ad alta frequenza ($\Omega=\infty$) ($\omega=\infty$). il valore di $\mu(\nu, \beta=\infty)=0$. Se $\beta=1$, si ha il ($\omega=\Omega$) cioè di frequenza propria uguale alla frequenza di eccitazione, il valore di $\mu(\nu, \beta=1)=1/(2\nu)$, pertanto se lo smorzamento è piccolo il coefficiente di amplificazione diviene molto grande. La situazione è detta di risonanza, ed al limite, dopo molte oscillazioni la struttura può amplificare moltissimo l'effetto dell'azione.

1.3.1 Valutazione del transitorio

Se si vuole valutare il transitorio si deve risolvere l'equazione differenziale (23). L'integrale particolare dell'equazione del moto è quello illustrato, si ricava d'altronde sostituendo il secondo termine della soluzione generale, cioè la soluzione particolare nella equazione di equilibrio, ricavando le espressioni di A e B sopra illustrate:

$$x = e^{-v\omega t} [A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t] + [A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t] \quad (36)$$

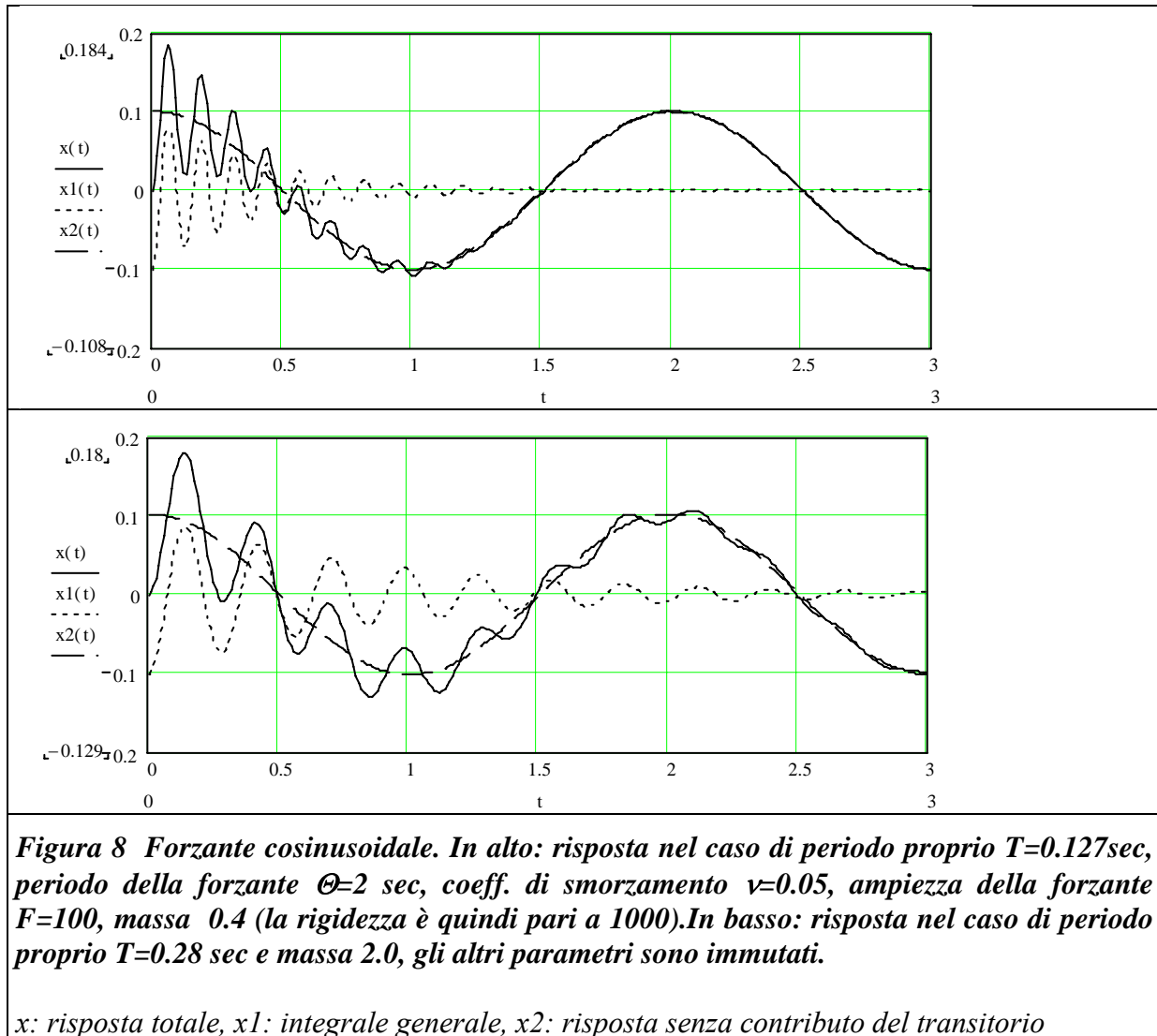
$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4v^2 \omega \Omega} \\ B_1 &= \frac{F_0}{m} \frac{2v\omega \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4v^2 \omega \Omega} \end{aligned} \quad (37)$$

Derivando la espressione (23) si ottiene l'espressione della velocità, si possono così imporre le condizioni iniziali e da queste ricavare le espressioni di A e di B in funzione di A_1 , B_1 e dello spostamento e velocità iniziali:

$$\begin{aligned} x_0 &= [A \cos \omega_1 0 + B \sin \omega_1 0] + [A_1 \cos \Omega 0 + B_1 \sin \Omega 0] \\ \dot{x}_0 &= -v\omega e^{-v\omega t} [A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t] + e^{-v\omega t} [-A\omega_1 \sin \omega_1 t + B\omega_1 \cos \omega_1 t] + [-A_1 \Omega \sin \Omega t + B_1 \Omega \cos \Omega t] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= A + A_1 \\ \dot{x}_0 &= -v\omega [A \cos \omega_1 0 + B \sin \omega_1 0] + B_1 \Omega \cos \Omega_1 0 = -v\omega A + B\omega_1 + B_1 \Omega \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} A &= x_0 - A_1 \\ B &= \frac{\dot{x}_0}{\omega_1} + \frac{v\omega}{\omega_1} A + \frac{B_1 \Omega}{\omega_1} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_1} + \frac{v\omega}{\omega_1} (x_0 - A_1) + \frac{B_1 \Omega}{\omega_1} \end{aligned} \quad (40)$$



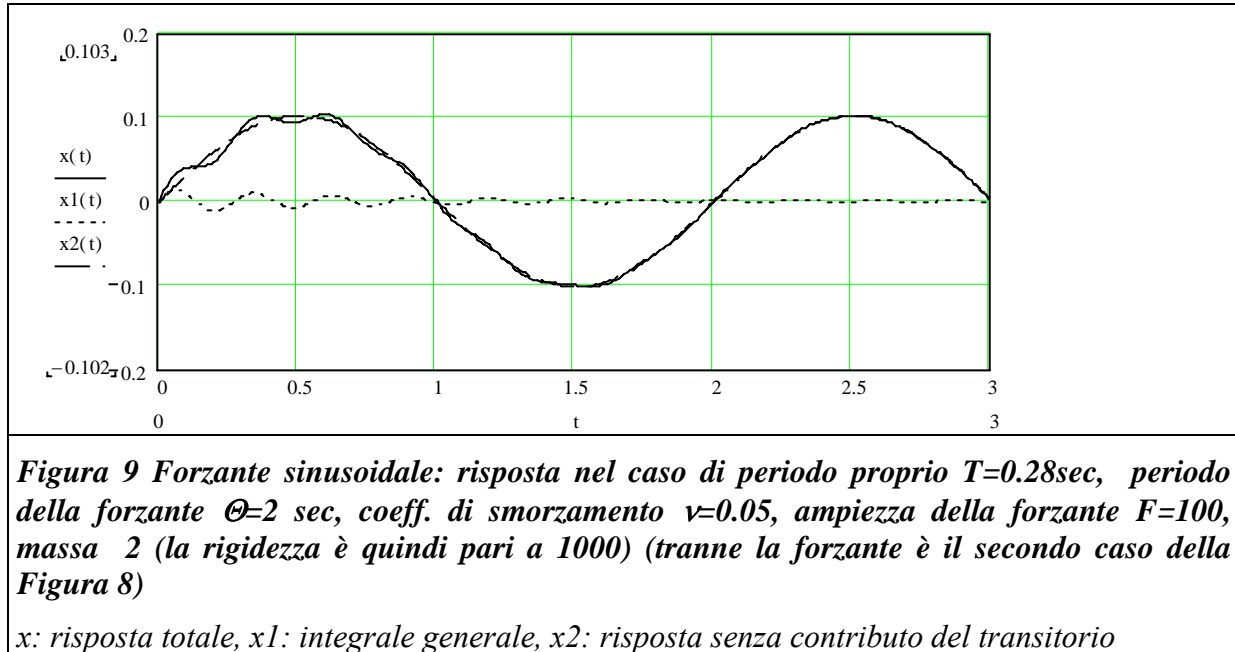
Le espressioni (40) sono diverse da 0 anche nel caso in cui velocità e spostamento iniziale sono nulli, pertanto il transitorio dà sempre luogo ad una alterazione della risposta, che tende ad annullarsi con le oscillazioni. Ad esempio, in Figura 8 si nota che la risposta totale $x(t)$, è diversa inizialmente dalla sola risposta a regime $x2(t)$, la differenza è data dal contributo del transitorio $x1(t)$.

Nella figura è ben evidente il fatto che l'applicazione della forzante già diversa da 0 dà luogo ad un considerevole differenza nella fase iniziale tra forzante e risposta, differenza che tende a ridursi dopo poche oscillazioni. L'effetto del transitorio è più modesto se viene applicata una forzante del tipo $F\sin(\Omega t)$ che parte anch'essa dal valore nullo al tempo $t=0$.

Nel caso di forzante sinusoidale le costanti A_1 e B_1 divengono:

$B_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\nu^2 \omega \Omega}$ $A_1 = -\frac{F_0}{m} \frac{2\nu \omega \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\nu^2 \omega \Omega}$	(41
---	------

Sono pertanto uguali alle espressioni della forzante cosinusoidale ma sono scambiate ed una, la A_1 con segno invertito, mentre le A e B dell'integrale generale si ottengono imponendo che la soluzione completa soddisfi le condizioni iniziali, hanno pertanto le medesime espressioni (40, ove A_1 e B_1 hanno le espressioni appena trovate.



1.4 Oscillatore semplice: Risposta al moto del terreno

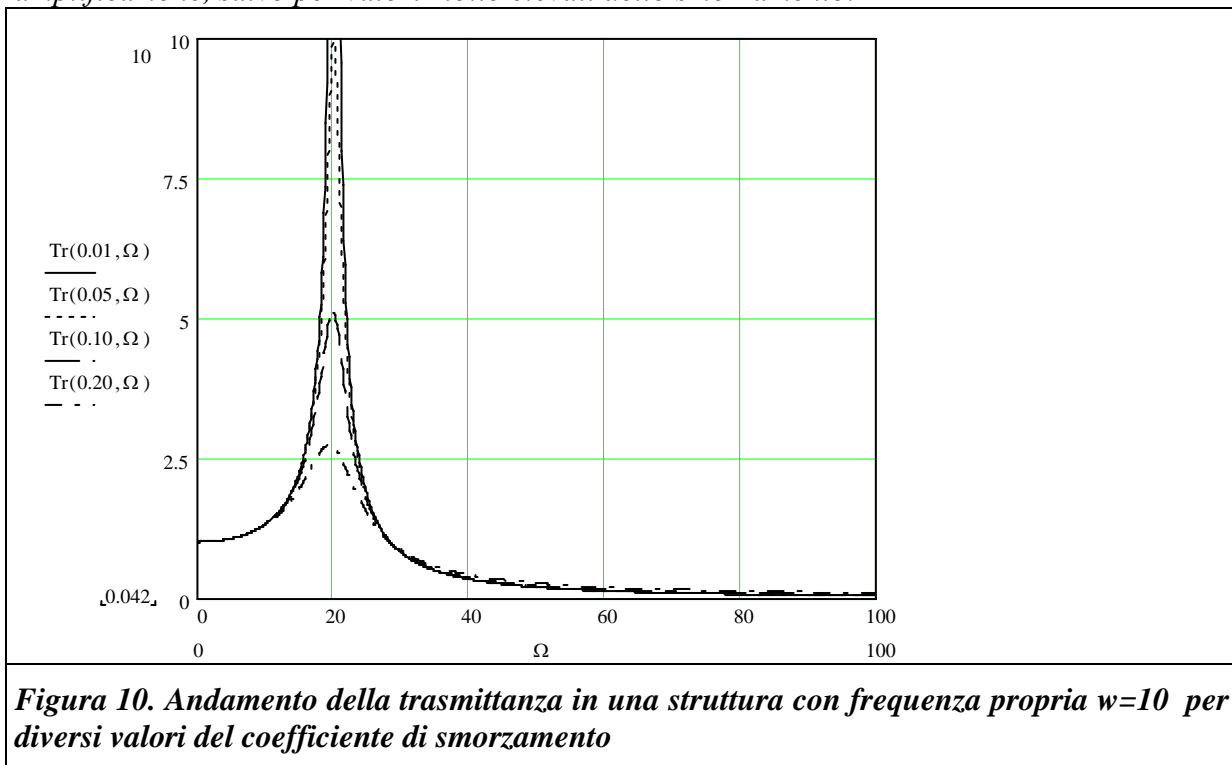
Se il moto del terreno è del tipo $A(t)=a_0 \sin \omega t$, l'equazione di equilibrio è la stessa (29 nella quale a termine noto è il termine $-m a_0 \sin \omega t$, anziché la forzante $F \sin \omega t$. La risposta è quindi quella appena vista ove al termine F si sostituisce $-m a_0$. Il rapporto tra la accelerazione assoluta del sistema e la accelerazione alla base, è detto *tramittanza del sistema*:

$$\frac{(\ddot{x}(t) + a(t))_{\max}}{a_0} = \left(\frac{1 + (2v\omega/\Omega)^2}{(1 - (\omega/\Omega)^2)^2 + 2v(\omega/\Omega)^2} \right)^{1/2} \quad (42)$$

Questa espressione è la medesima che si ottiene nel caso di forzante sinusoidale tra forza totale di risposta e forza agente:

$$\frac{(d\omega \cdot \dot{x} + k \cdot x)_{\max}}{F_0}$$

La stessa relazione vale tra spostamento assoluto, somma di quello relativo e quello del terreno, e spostamento del solo terreno. La trasmittanza ha pressoché lo stesso valore del coefficiente di amplificazione, salvo per valori molto elevati dello smorzamento.



Si noti che la risposta diviene quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{ma_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4v^2\omega\Omega}} \cos(\Omega t - \phi) \\ x(t) &= a_0 M(v, \omega, \Omega) \cdot \cos(\Omega t - \phi) \end{aligned} \quad (43)$$

$M(\nu, \omega, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\nu^2 \omega \Omega}} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ $\phi = \text{artg}\left(\frac{B_1}{A_1}\right) = \frac{2\nu \omega \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)}$	
---	--

La funzione $M()$ è detta funzione di trasferimento, se si vuole la risposta in accelerazione la funzione va derivata due volte rispetto al tempo, ottenendo quindi la funzione di trasferimento in accelerazione relativa: $\Omega^2 M()$.

$M(\nu, \omega, \Omega) = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\nu^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2}}}$ $\beta = \frac{\Omega^2}{\omega^2}$ $M(\nu, \omega, \Omega) = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\nu^2 \beta^2}} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \mu(\nu, \beta)$ $\mu(\nu, \beta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\nu^2 \beta^2}}$	(44
---	------

1.5 Oscillatore semplice: Valutazione della Risposta in Forma Numerica.

1.5.1 Calcolo della risposta dinamica al passo: Metodo di integrazione al passo dell'equazione del moto

In genere, disponendo di un calcolatore, è conveniente integrare numericamente l'equazione di equilibrio dinamico:

$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = -ma(t)$	(1)
---	-----

piuttosto che non risolvere l'integrale di Duhamel o la soluzione relativa alla sovrapposizione in frequenza. Si tratta di discretizzare il tempo in intervalli di dimensione costante Δt , sufficientemente piccoli e scrivere l'equazione dinamica non in forma differenziale ma in forma finita. La funzione spostamento e le sue derivate sono calcolate in corrispondenza dei tempi t_i , in cui è stato discretizzato il fenomeno.

I metodi numerici rappresentano l'unica soluzione per il calcolo della risposta se la struttura entra in campo non lineare. Peraltro stime della risposta non lineare possono essere fatte con metodi approssimati basati su approssimazioni lineari della risposta.

Si illustrano nel seguito due metodi di integrazione numerica: il primo delle differenze centrali, nel quale l'incognita di spostamento all'istante $i+1$, è espressa in funzione dello spostamento e delle sue derivate (velocità ed accelerazione) agli istanti precedenti: i ed $i-1$, è detto per questo un metodo esplicito; il secondo, chiamato metodo di Newmark, esprime lo spostamento all'istante $i+1$ in funzione degli spostamenti agli istanti i ed $i-1$, ma anche della accelerazione all'istante $i+1$, lo stesso in cui viene calcolato lo spostamento, e che è anch'esso una incognita. Il metodo, almeno in linea di principio, richiede di iterare a partire da un valore di tentativo della accelerazione all'istante $i+1$, ed è per questo detto implicito.

1.5.2 Metodi espliciti: le differenze centrali

La velocità all'istante i può essere espressa come rapporto incrementale tra quelle agli istanti $i+1$ ed $i-1$:

$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t}$	(2)
---	-----

L'accelerazione si può ottenere dal rapporto tra l'incremento della velocità tra $i+1$ ed i , ed i ed $i-1$:

$\dot{x}_i^+ = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}; \dot{x}_i^- = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}$	(3)
$\ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}$	(4)

Sostituendo la (3) e la (2) nella equazione di equilibrio dinamico (1) si ottiene:

$m \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2} + d \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} + kx_i = -ma(t_i)$	(5)
---	-----

Raccogliendo i termini con lo stesso indice e portando a destra dell'uguale i termini che dipendono da i ed $i-1$ si ottiene:

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{d}{2\Delta t} \right] x_{i+1} = -ma(t_i) - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{d}{2\Delta t} \right] x_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] x_i \quad (6)$$

La (6) è una equazione ricorrente, all'istante $i+1$ sono note tutte le grandezze relative agli istanti precedenti, pertanto è possibile ricavare lo spostamento x relativo ad $i+1$.

La (6) può essere vista come la classica $Kx=F$, in cui la F è il secondo membro.

Si noti inoltre come nella (6) compaia il termine Kx , che rappresenta la forza elastica all'istante i . Qualora la struttura abbia comportamento non lineare l'espressione relativa alla forza di richiamo è $f(x)$, pertanto la (1) diviene:

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + f(x(t)) = -ma(t) \quad (7)$$

e la (5) diviene:

$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{d}{2\Delta t} \right] x_{i+1} = -ma(t_i) - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{d}{2\Delta t} \right] x_{i-1} - \left[f(x_i) - \frac{2m}{(\Delta t)^2} x_i \right]$	(8)
--	-----

Si deve osservare come anche la forza di richiamo non lineare sia nota in quanto è proprio quella relativa al passo precedente. Nessuna differenza, nemmeno di complessità di calcolo, vi è in questo caso nel passaggio da una analisi lineare ad una non lineare.

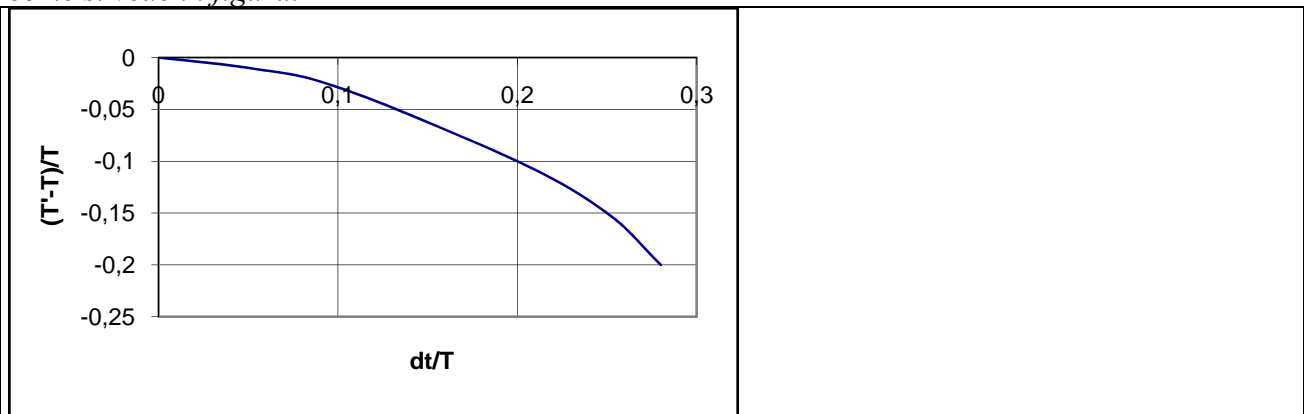
Si deve infine osservare che per il calcolo del primo passo $t=\Delta t=i+1$, non è possibile definire lo spostamento all'istante $i-1$ da inserire nella (6) o nella (8).

Se si specializzano la (2) e la (4) per $t=0$, ricavando velocità ed accelerazione al tempo $t=0$, ricavando dalla (2) la x_{i+1} , e sostituendola nella (4), e ricavando da questa x_{i-1} , si ottiene:

$x_{i-1} = x_i - \Delta t \dot{x}_i - (\Delta t)^2 \ddot{x}_i / 2$	(9)
--	-----

È chiaro che le grandezze all'istante $t=0$ sono un dato del problema, in generale sono nulle.

Vi sono due requisiti essenziali cui i metodi di integrazione al passo devono soddisfare: devono essere “stabili”, e devono assicurare la “convergenza” alla soluzione esatta. Il primo requisito è dovuto alla caratteristica che alcuni sistemi di integrazione numerica hanno di divergere indefinitamente se il passo di integrazione non è sufficientemente piccolo rispetto al periodo proprio della struttura. Più precisamente se si calcola la risposta dell'oscillatore semplice non smorzato nel caso di oscillazioni libere il cui risultato esatto è: $\text{Acos } \omega t$, nel caso del metodo delle differenze centrali la risposta può risultare non oscillatoria ed anzi cresce indefinitamente se $\Delta t > T/\pi$. Il metodo dà comunque luogo a risposte sinusoidali ma con periodi inferiori rispetto a quello reale, questa tipo di errore, detto di convergenza, si riduce al diminuire del rapporto $\Delta t/T$ come si vede in figura.



Metodo delle differenze centrali, scostamento tra periodo proprio calcolato ed effettivo per oscillazioni libere non smorzate

In pratica nel caso sismico la necessità di rappresentare l'azione in modo accurato impone in genere di scegliere un passo di integrazione non superiore a 0.02 secondi, mentre valori tipici vanno da 0.005 a 0.01 secondi. Pertanto, nel caso di strutture civili, ad un grado di libertà, nelle quali il periodo proprio è in genere superiore a 0.1 secondi, il rapporto $\Delta t/T$ è inferiore a 10, il metodo risulta pertanto stabile ($\Delta t/T < 1/\pi$: condizione di stabilità) ed accurato (si veda la figura). Se la struttura entra in campo plastico i due requisiti divengono più facili da soddisfare, in quanto l'effetto globale è equivalente ad un allungamento del periodo.

In definitiva i passi da seguire nella programmazione del metodo delle differenze centrali sono i seguenti:

passo iniziale: valutazione dell'accelerazione al tempo $t=0$ (eq.(1, eq.(9, (8:

$\ddot{x}(t=0) = \frac{(-d\dot{x}(t=0) - kx(t=0) - ma(t=0))}{m}$	(10)
--	------

$x_{-1} = x_0 - \Delta t \dot{x}_0 - (\Delta t)^2 \frac{\ddot{x}_0}{2}$ $\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{d}{2\Delta t} \right] x_1 = -ma(t_0) - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{d}{2\Delta t} \right] x_{-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] x_0$	
--	--

A tutti i passi successivi (eq.(8):

$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{d}{2\Delta t} \right] x_{i+1} = -ma(t_i) - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{d}{2\Delta t} \right] x_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] x_i$	(11)
---	------

Se si devono calcolare le altre grandezze di passo si utilizzano la (2) e la (4):

$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t}$ $\ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}$	(12)
--	------

1.5.3 Metodi impliciti: il metodo di Newmark

Si ipotizzi che si possa approssimare l'accelerazione di risposta (relativa) in ogni passo con una accelerazione costante pari alla media delle accelerazioni di inizio (punto i) e fine passo (punto $i+1$).

In tale ipotesi si possono ricavare le grandezze del moto lungo il passo ed a fine passo:

$\ddot{x}_i = \frac{\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i}{2}$	(13)
$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta t \frac{\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i}{2}$	(14)
$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i)$	(15)

La (14) può essere scritta come

$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1-0.5)\Delta t] \ddot{x}_i + (0.5\Delta t) \ddot{x}_{i+1}$	(16)
$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + [(0.5-0.25)\Delta t^2] \ddot{x}_i + [0.25\Delta t^2] \ddot{x}_{i+1}$	(17)

Le espressioni (14a ed (14b possono essere generalizzate secondo le due espressioni seguenti dovute a Newmark (1):

$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1-\alpha)\Delta t] \ddot{x}_i + (\alpha\Delta t) \ddot{x}_{i+1}$	(18)
$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + [(0.5-\beta)\Delta t^2] \ddot{x}_i + [\beta\Delta t^2] \ddot{x}_{i+1}$	(19)

Se i valori di α e β sono rispettivamente 0.5 e 0.25 le due espressioni coincidono con le (16 e (17. Si trova immediatamente che se i valori di α e β sono rispettivamente 0.5 e 1/6, le due espressioni coincidono con la soluzione relativa al caso in cui l'integrazione nel passo si esegua utilizzando una variazione lineare della accelerazione relativa tra inizio e fine passo (secondo la ben nota regola dei trapezi).

La (19) può essere utilizzata per ricavare lo spostamento di fine passo. La (18) per ricavare la velocità di fine passo. Si deve utilizzare un criterio iterativo assegnando inizialmente un valore di tentativo alla accelerazione. Se a fine passo, sostituendo i valori trovati nella equazione di equilibrio dinamico (1) si ottiene un valore della accelerazione sufficientemente prossimo a quello di tentativo, si può ritenere di aver raggiunto la convergenza, altrimenti si deve iterare sino a convergenza.

1.5.4 Riferimenti bibliografici

Newmark, N.M., 1959, "A Method of Computation for Structural Dynamics", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE 85

1.6 Oscillatore Semplice: Stima della risposta massima non lineare

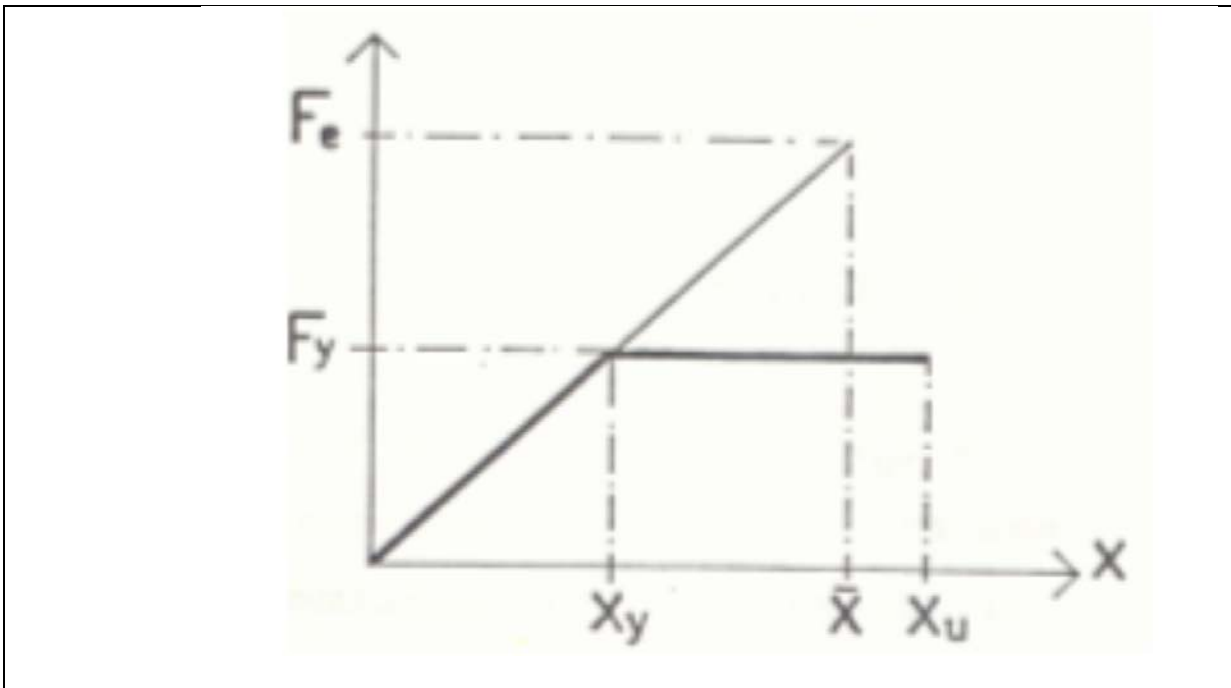
E' stato dimostrato che lo spostamento massimo di un oscillatore semplice elasto plastico soggetto ad un accelerogramma, se il periodo proprio è elevato, è circa uguale a quello dell'oscillatore indefinitamente elastico. Pertanto il taglio massimo nella struttura è pari al taglio elastico diviso per la duttilità massima richiesta.

Se il periodo proprio è breve, la risposta in spostamento è tale da aver la stessa energia di deformazione massima dell'oscillatore elastico indefinito. Detta $E_{el}=1/2 Kx_e^2$, detta $E_{ep}=1/2 Kx_y^2+1K(x_u-x_y)=Kx_yx_u-1/2 Kx_y^2$, uguagliando i due termini si ha:

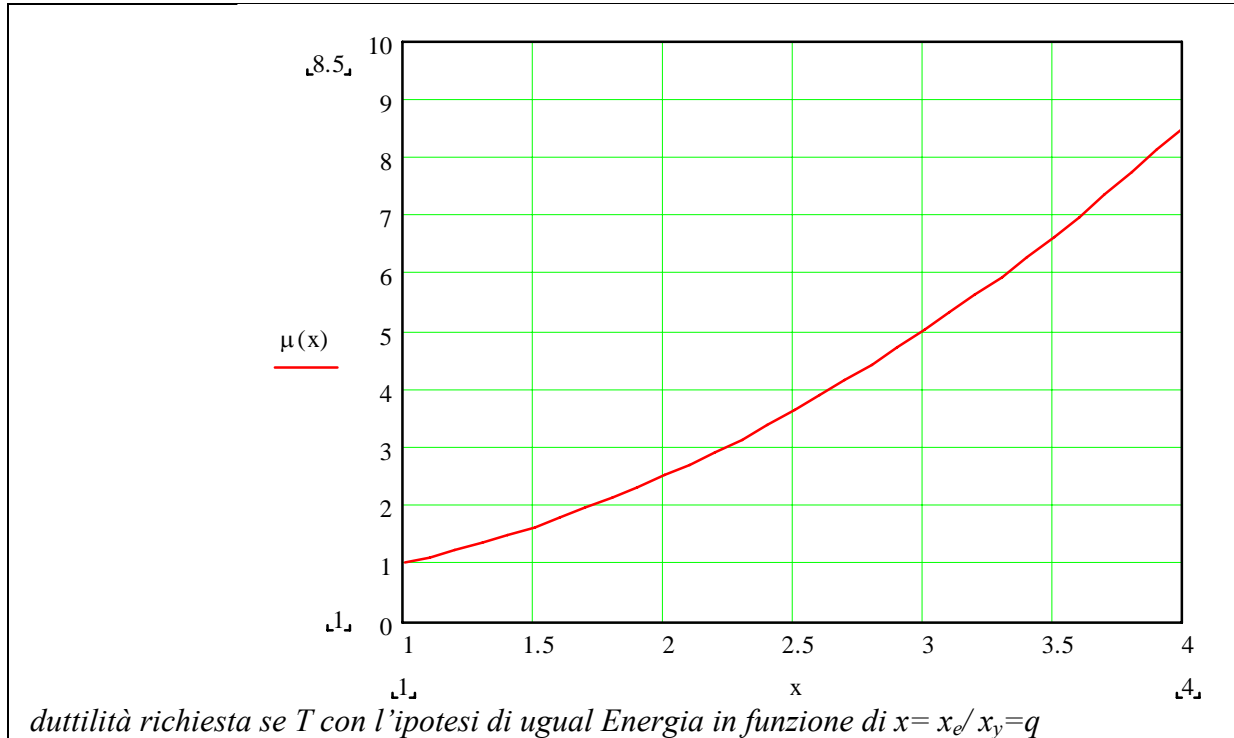
$$x_u=0.5(x_e^2/x_y+x_y)=0.5(q^2x_y+x_y)$$

esprimendo x_u normalizzato rispetto ad x_y si ha:

$$\mu=x_u/x_y=0.5[(x_e/x_y)^2+1]=0.5(q^2+1)$$



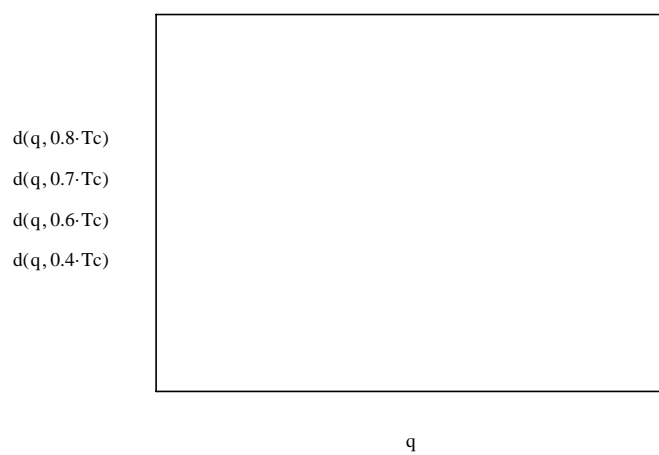
q rappresenta il fattore di riduzione della forza: $q=F_e/F_y$



In genere se l'azione sismica è rappresentata dallo spettro di risposta elastico di progetto, ed il periodo proprio si trova nella zona a velocità costante: $T > T_c$, si assume valida l'ipotesi di ugual spostamento, al di sotto di tale periodo l'ipotesi di ugual energia è ragionevolmente cautelativa. Detto q il rapporto tra forza di inerzia massima F_e se la struttura rimane in campo elastico e la resistenza della struttura F_y , qualora il periodo della struttura T^* sia inferiore a T_c si può utilizzare l'espressione :

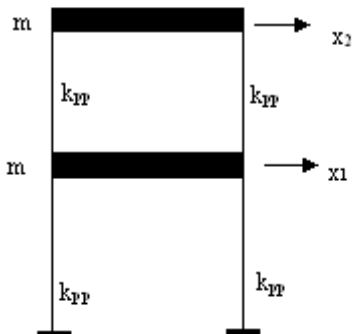
$$d_{\max}^* = \frac{d_{e,\max}^*}{q^*} \left[1 + \left(q^* - 1 \right) \frac{T_c}{T^*} \right] \geq d_{e,\max}^*$$

per il calcolo della risposta massima in spostamento, nella espressione data $d_{e,\max}$ è lo spostamento nel caso di risposta elastica.



2 Strutture a Più Gradi di Libertà: Coordinate Generalizzate

Si consideri il telaio a 2 piani in figura.



Si trascura la deformabilità assiale e per taglio, le travi sono infinitamente rigide
(Unità di misura: $[F]=[kN]$, $[L]=[m]$, $[m]=[ton]$)

Caratteristiche geometriche

Dimensione pilastri: $b \times h = 300 \times 300 \text{ mm}^2$

Altezza di piano: $h_p = 3,000 \text{ m}$

Lunghezza campata: $L = 6,000 \text{ m}$

Numero di pilastri: $n = 2$

Interasse telai: $i_n = 5,000 \text{ m}$

Momento d'inerzia dei pilastri: $I_p = \frac{1}{12}bh^3 = 6,75 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

Rigidezza dei pilastri: $k_{pp} = 12 \frac{EI_p}{h_p^3} = 9 \times 10^3 \text{ kNm}^{-1}$

Rigidezza di piano: $k_p = n \times k_{pp} = 18 \times 10^3 \text{ kNm}^{-1}$

Caratteristiche meccaniche

Modulo elastico del cls: $E = 30000 \text{ MPa} (= 30000 \times 10^3 \text{ kNm}^{-2})$

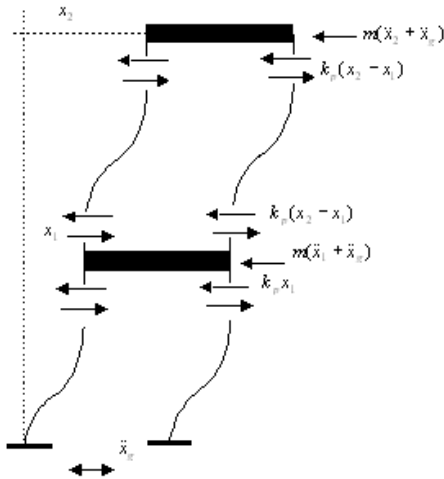
Masse

Massa impalcato: $m_i = 0,70 \text{ ton m}^{-2}$

Massa sulla trave di piano: $m_t = m_i \times i_n = 3,5 \text{ ton m}^{-1}$

Massa di piano: $m = m_t \times L = 21 \text{ ton}$

2.1 EQUAZIONI DEL MOTO E MATRICI DELLE MASSE E DELLE RIGIDEZZE



Il sistema di equazioni che governano il moto della struttura si possono ricavare utilizzando differenti metodi :

- 1) Equilibrio alla d'Alambert (scrittura diretta delle equazioni di equilibrio dinamico)
- 2) Metodo energetico (Principio di Hamilton o della conservazione dell'energia totale del sistema)
- 3) Elementi finiti

Mentre il metodo 3) è utilizzato ampiamente nei programmi di calcolo perchè si presta ad un elevato grado di automatizzazione, i primi due metodi sono il frutto del tradizionale approccio alla dinamica Lagrangiana.

Con riferimento al telaio dell'esempio viene ora descritto il metodo 1).

Nella figura accanto sono illustrate le sollecitazioni di taglio ad ogni piano (verso ed ampiezza). Il telaio è soggetto ad uno spostamento alla base x_g . Effettuando l'equilibrio alla traslazione delle masse di piano possiamo scrivere il sistema di equazioni seguenti, ognuna delle quali mostra come la forza d'inerzia (proporzionale all'accelerazione assoluta della massa) equilibri la reazione elastica (proporzionale alla rigidezza di piano k_p e dipendente dallo spostamento relativo di piano).

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_g) - k_p(x_2 - x_1) + k_p x_1 = 0 \\ m(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_g) + k_p(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

che si può riscrivere mettendo a fattor comune le incognite x_1 e x_2 ossia gli spostamento relativi piano (vedi figura).

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2k_p x_1 - k_p x_2 = -m\ddot{x}_g \\ m\ddot{x}_2 - k_p x_1 + k_p x_2 = -m\ddot{x}_g \end{cases}$$

Volendo scrivere le precedenti in forma compatta si può utilizzare la notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_p & -k_p \\ -k_p & k_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{x}_g$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{M}\mathbf{I}\ddot{x}_g$$

nella quale \mathbf{M} è la matrice delle masse, \mathbf{K} è la matrice delle rigidezze, \mathbf{I} è il vettore di trascinamento ed \mathbf{X} è il **vettore incognito** degli spostamenti di piano. Il termine a secondo membro rappresenta il vettore delle forze equivalenti al sisma.

2.2 SOLUZIONE CON APPLICAZIONE AD UN TELAIO PIANO

Nel caso dell'esempio le matrici delle masse e delle rigidezze assumono le espressioni:

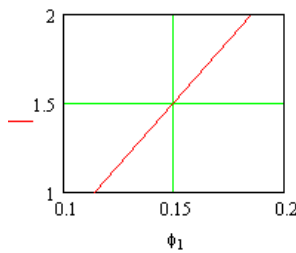
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle masse}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k_p & -k_p \\ -k_p & k_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.6 \cdot 10^4 & -1.8 \cdot 10^4 \\ -1.8 \cdot 10^4 & 1.8 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \quad \text{matrice delle rigidezze}$$

Se si ipotizza di conoscere una soluzione del tipo $\mathbf{X} = \boldsymbol{\phi} y(t)$, ove $y(t)$ è uno scalare che viene detto la coordinata generalizzata e serve a modulare il vettore $\boldsymbol{\phi}$, quest'ultimo dà la forma della deformazione.

Ad esempio:

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0.115 \\ 0.186 \end{bmatrix}$$



Spostamenti del primo e secondo piano

Per il principio dei lavori virtuali il lavoro delle forze interne ed esterne fatto in uno spostamento virtuale deve essere nullo perché vi sia equilibrio.

Sostituendo a \mathbf{X} l'espressione dello spostamento $\mathbf{X} = \boldsymbol{\phi} y$ e le sue derivate temporali, assunto proprio $\delta\mathbf{X} = \boldsymbol{\phi} \delta y$ quale spostamento virtuale, premoltiplicando per $\boldsymbol{\phi}^T$ i termini dell'equazione di equilibrio si ottiene:

$$\partial y \cdot \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\phi}} y + \partial y \cdot \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{x}_g + \partial y \cdot \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\phi}} y + \partial y \cdot \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} y = 0$$

Dividendo per δy si ottiene:

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\phi}} y + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{x}_g + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\phi}} y + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} y = 0$$

Che può riscriversi come:

$$\phi^T \mathbf{M} \phi \ddot{y} + \phi^T \mathbf{D} \phi \dot{y} + \phi^T \mathbf{K} \phi y = -\phi^T \mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{x}_g$$

Da cui:

$$\phi^T \mathbf{M} \phi \ddot{y} + \phi^T \mathbf{D} \phi \dot{y} + \phi^T \mathbf{K} \phi y = -\phi^T \mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{x}_g$$

Ponendo:

$$\phi^T \mathbf{M} \phi = m$$

$$\phi^T \mathbf{D} \phi = d$$

$$\phi^T \mathbf{K} \phi = k$$

$$\phi^T \mathbf{M} \mathbf{I} = L$$

L'equazione di equilibrio si riscrive:

$$m \ddot{y} + d \dot{y} + k y = -L \ddot{x}_g$$

m = massa generalizzata, d = smorzamento generalizzato, k = rigidezza generalizzata.

Dividendo per la massa generalizzata si ottiene:

$$\ddot{y} + 2v\omega \dot{y} + \omega^2 y = -p \ddot{x}_g$$

Ove $p=L/m$, è detto coefficiente di partecipazione.

L'equazione è quella di un oscillatore semplice soggetto ad una accelerazione amplificata p volte rispetto a quella effettiva.

3 Strutture a Più Gradi di Libertà: Analisi Modale

3.1 CALCOLO DELLE FREQUENZE E PERIODI PROPRI DEL SISTEMA

Si consideri ora il caso nel quale sia assente la forzante esterna in genere denominato problema delle **OSCILLAZIONI LIBERE**.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Si può ipotizzare una soluzione di tentativo del tipo

$$\mathbf{X} := \boldsymbol{\phi} \cdot \sin \omega t$$

Sostituendo la precedente nel sistema di equazioni si ottiene un nuovo sistema nel quale le incognite sono il vettore delle ampiezze $\boldsymbol{\phi}$ e la frequenza del moto ω , la determinazione della cui soluzione è detta **PROBLEMA AGLI AUTOVALORI**

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

ossia in forma compatta

Il sistema così ottenuto è un sistema omogeneo che come ben noto dalla matematica ammette soluzione (autosoluzione) se e soltanto se il determinante della matrice dei coefficienti possiede determinante nullo. Dunque per calcolare le **autosoluzioni** del sistema occorre imporre la condizione:

$$\det[\mathbf{E}] = 0$$

Nel caso del telaio in esame il problema agli autovalori si scrive semplicemente:

$$\left[\begin{pmatrix} 2k_p & -k_p \\ -k_p & k_p \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 2k_p - \omega^2 m & -k_p \\ -k_p & k_p - \omega^2 m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Imponendo l'annullamento del determinante della matrice \mathbf{E} si ottiene la seguente equazione algebrica biquadratica nell'incognita ω

$$\left(2k_p - \omega^2 m\right)\left(k_p - \omega^2 m\right) - k_p^2 := 0$$

$$m^2 \omega^4 - 3mk_p \omega^2 + k_p^2 := 0$$

le cui soluzioni sono date dalle espressioni seguenti

$$\omega_1^2 := \frac{3mk_p + \sqrt{(9m^2 k_p^2) - 4m^2 k_p^2}}{2m^2}$$

$$\omega_2^2 := \frac{3mk_p - \sqrt{(9m^2 k_p^2) - 4m^2 k_p^2}}{2m^2}$$

I due valori ω_1 e ω_2 sono detti **FREQUENZE PROPRIE** del sistema

Calcolo coefficienti

Polinomio caratteristico $ax^2 + bx + c = 0$:

$$a := m^2$$

$$b := -(3 \cdot k_p \cdot m)$$

$$c := k_p^2$$

$$\lambda_1 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\lambda_1 = 327.399$$

$$\lambda_2 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\lambda_2 = 2.244 \times 10^3$$

FREQUENZE PROPRIE

PERIODI PROPRI

$$\omega_1 := \sqrt{\lambda_1}$$

$$\omega_1 = 18.094$$

$$T_1 := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1}$$

$$T_1 = 0.347$$

$$\omega_2 := \sqrt{\lambda_2}$$

$$\omega_2 = 47.371$$

$$T_2 := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_2}$$

$$T_2 = 0.133$$

- Uso del problema agli autovalori generalizzato implementato in Mathcad

Spesso i programmi di calcolo automatico sfruttano metodi numerici approssimati per la valutazione della frequenze proprie

$\text{FQUAD} := \text{genvals}(\mathbf{K}, \mathbf{M})$

$$\text{FQUAD} = \begin{pmatrix} 2.244 \times 10^3 \\ 327.399 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} := \sqrt{\text{FQUAD}}$$

$$\underline{\underline{T}} := 2 \cdot \pi \cdot \Omega^{-1}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 47.371 \\ 18.094 \end{pmatrix}$$

(FREQUENZE PROPRIE)

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0.133 \\ 0.347 \end{pmatrix}$$

(PERIODI PROPRI)

CALCOLO DEGLI AUTOVETTORI

Poichè gli autovettori sono definiti a meno di una costante è possibile scegliere differenti condizioni di normalizzazione

1) metodo della componente unitaria

Imponendo la condizione che almeno una componente di ciascun autovettore sia 1 e partizionando la matrice del problema agli autovalori si ha

$$\mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\phi}_i := 0$$

problema agli autovalori
autovettore i-mo

$$\boldsymbol{\phi}_i := \begin{pmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_i := \mathbf{K} - \lambda_i \cdot \mathbf{M}$$

matrice del problema agli autovalori

partizionamento della matrice del problema agli autovalori

$$\mathbf{E}_i := \begin{pmatrix} e_{i1} & E_{i,10} \\ E_{i,01} & \mathbf{E}_i, 11 \end{pmatrix}$$

se si pone ad esempio

$$\phi_{i1} := 1$$

dalla seconda equazione si ricava il valore di ϕ_{i2}

poichè gli autovalori hanno reso dipendenti le due equazioni la prima sarà automaticamente soddisfatta. Nel caso di più di due gradi di libertà il termine $E_{i,01}$ rappresenta la prima colonna della matrice dei coefficienti moltiplicato per 1, primo valore dell'autovettore posto =1, esso fa sì che i termini noti del problema siano proprio i valori $E_{i,01}$

passiamo al nostro esempio

Autovettore ϕ_1

$$\phi_{11} := 1$$

$$\mathbf{E}_1 := \mathbf{K} - \lambda_1 \cdot \mathbf{M}$$

$$E_{11} := E_{1,1,1}$$

$$E_{01} := E_{1,0,1}$$

$$\phi_{21} := -E_{11}^{-1} \cdot E_{01}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{1a} := \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{1a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.618 \end{pmatrix}$$

Autovettore ϕ_2

$$\phi_{12} := 1$$

$$E_2 := K - \lambda_2 \cdot M$$

$$E_{22} := E_{2,1}$$

$$E_{02} := E_{0,1}$$

$$\phi_{22} := -E_{22}^{-1} \cdot E_{02}$$

$$\phi_{2a} := \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix}$$

$$\phi_{2a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.618 \end{pmatrix}$$

La forma generale prima ricavata può essere particolarizzata al caso attuale. Ad esempio con riferimento al primo modo la prima equazione del moto si può scrivere:

$$(2 \cdot k_p - \lambda_1 \cdot m) \cdot \phi_{11} - k_p \cdot \phi_{12} := 0$$

dalla quale si evince, che posto

$$\phi_{11} := 1$$

$$\phi_{12} := \frac{2 \cdot k_p - \lambda_1 \cdot m}{k_p}$$

$$\phi_{12} = 1.618$$

Analogamente per l'autovettore del secondo modo

2) metodo della normalizzazione della matrice delle masse

In tale caso si impongono le seguenti condizioni:

$$\phi_i^T M \cdot \phi_i := 1$$

$$i := 1..n$$

$n = n^\circ$ piani

Raccogliendo gli autovettori ϕ_i in un'unica matrice Φ detta **matrice modale** le precedenti possono scriversi in maniera compatta

$$\Phi^T M \cdot \Phi := I$$

dove la matrice I è la matrice unità

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per il caso dell'esempio imponendo la precedente al problema agli autovalori prima definito si ottengono le seguenti componenti del i -mo autovettore

$$\phi_{i1} := \frac{\frac{k_p^2}{m}}{\sqrt{(2k_p - \lambda_i \cdot m)^2 + k_p^2}}$$

$$\phi_{i2} := \frac{1 - m \cdot \phi_{i1}^2}{m}$$

Calcoliamoci dunque le componenti dei singoli autovettori

Autovettore ϕ_1

$$\phi_{11} := \frac{\frac{k_p^2}{m}}{\sqrt{(2k_p - \lambda_1 \cdot m)^2 + k_p^2}}$$

$$\phi_{12} := \frac{1 - m \cdot \phi_{11}^2}{m}$$

$$\phi_1 := \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.115 \\ 0.186 \end{pmatrix}$$

Autovettore ϕ_2

$$\phi_{21} := \sqrt{\frac{\frac{k_p^2}{m}}{(2k_p - \lambda_2 \cdot m)^2 + k_p^2}}$$

$$\phi_{22} := -\sqrt{\frac{1 - m \cdot \phi_{21}^2}{m}}$$

$$\phi_2 := \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 0.186 \\ -0.115 \end{pmatrix}$$

NB. Una maniera alternativa di imporre la normalizzazione rispetto alla matrice delle masse è quella di utilizzare i vettori normalizzati col metodo della componente unitaria e poi sfruttare la proprietà che gli autovettori sono definiti a meno di una costante per valutare i nuovi vettori. In particolare ponendo le seguenti condizioni

$$\phi_1 := C_1 \cdot \phi_{1a}$$

$$\phi_2 := C_2 \cdot \phi_{2a}$$

$$\phi_1^T \cdot M \cdot \phi_1 := 1$$

$$\phi_2^T \cdot M \cdot \phi_2 := 1$$

(normalizzazione rispetto alla matrice delle masse)

dove i vettori

$$\phi_{1a}$$

$$\phi_{2a}$$

sono i vettori ricavati col metodo della componente unitaria

si ottengono le soluzioni per i coefficienti C_1 e C_2

$$C_1 := \sqrt{\frac{1}{\phi_{1a}^T \cdot M \cdot \phi_{1a}}}$$

$$C_2 := \sqrt{\frac{1}{\phi_{2a}^T \cdot M \cdot \phi_{2a}}}$$

I nuovi vettori ϕ_1 e ϕ_2 risultano ora normalizzati rispetto alla matrice della masse

Nel caso dell'esempio si ha:

$$C_1 = 0.115$$

$$C_2 = 0.186$$

$$\phi_1 := C_1 \cdot \phi_{1a}$$

$$\phi_2 := C_2 \cdot \phi_{2a}$$

i :=

	0	1
0	1	
1	2	

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.115 \\ 0.186 \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 0.186 \\ -0.115 \end{pmatrix}$$

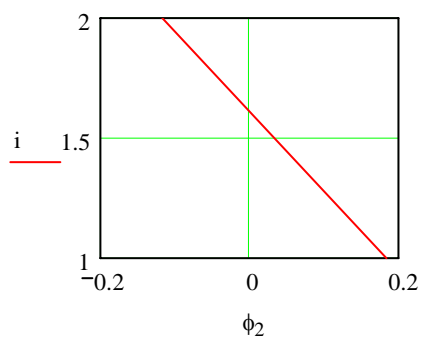
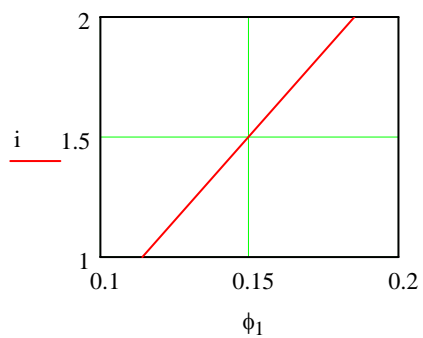
che sono esattamente i vettori precedentemente determinati imponendo direttamente la normalizzazione rispetto alla matrice delle masse.

Naturalmente per valutare gli autovettori è possibile, come logico, utilizzare anche un comando automatico come quello implementato in Matchad

Mathcad usa una normalizzazione differente dalle due esposte precedentemente

$$\Phi := \text{genvecs}(M, K)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.526 & 0.851 \\ 0.851 & -0.526 \end{pmatrix}$$



I° modo di vibrare

II° modo di vibrare

$$T_1 = 0.347$$

$$T_2 = 0.133$$

NB : Come è usuale il primo modo di vibrare risulta lineare mentre il secondo risulta intrecciato con valore negativo dello spostamento in sommità

3.1.1 PROPRIETA' DI ORTONORMALITA' DEGLI AUTOVETTORI

A prescindere dal metodo di normalizzazione adottato si dimostra facilmente che gli autovettori appena ricavati possiedono una importantissima proprietà detta di ortonormalità che si esprime come segue

$$\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_j := 0$$

se

i è diverso da j

$$\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_j := 0$$

se

i è diverso da j

Se poi si adottasse la normalizzazione degli autovettori rispetto alla matrice delle masse si otterrebbero le condizioni aggiuntive seguenti

$$\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i := 1$$

$$\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i := \omega_i^2$$

Ossia in forma compatta:

$$\Phi^T \cdot M \cdot \Phi := I$$

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^T \cdot K \cdot \Phi := \Lambda$$

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

Con le precedenti è possibile rendere le equazioni del sistema indipendenti tra loro (vedi calcolo della risposta col metodo della sovrapposizione modale).

Nel caso dell'esempio la verifica dell'ortonormalità degli autovettori è immediata :

$$\phi_1^T M \cdot \phi_2 = 0$$

$$\phi_1^T M \cdot \phi_2 = 0$$

$$\phi_1^T K \cdot \phi_2 = -2.842 \times 10^{-14}$$

$$\phi_2^T K \cdot \phi_1 = 2.274 \times 10^{-13}$$

Calcolo a posteriori delle frequenze proprie del sistema

$$A := \phi_1^T M \cdot \phi_1$$

$$B := \phi_2^T M \cdot \phi_2$$

$$\underline{C} := \phi_1^T \mathbf{K} \cdot \phi_1$$

$$\underline{D} := \phi_2^T \mathbf{K} \cdot \phi_2$$

$$\underline{\omega}_1 := \sqrt{\frac{\underline{C}}{\underline{A}}}$$

$$\omega_1 = 18.094$$

Frequenza I° Modo

$$\underline{\omega}_2 := \sqrt{\frac{\underline{D}}{\underline{B}}}$$

$$\omega_2 = 47.371$$

Frequenza II° Modo

3.1.2 CALCOLO ITERATIVO DEI MODI E FREQUENZE PROPRIE

Si illustra un metodo iterativo per il calcolo di autovalori ed autovettori, utilizzabile con qualsiasi programma statico, utile per il controllo dei risultati dell'analisi dinamica.

data l'espressione agli autovalori:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{0}$$

se si premoltiplica per

$$\frac{1}{\omega^2} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{0}$$

si ottiene l'espressione:

$$\left(\frac{1}{\omega^2} \mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}\right)\phi = \mathbf{0}$$

che dà luogo alla forma iterativa:

$$\frac{1}{\omega^2} \phi^1 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \phi^0$$

$$\phi^{n1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \phi^0; \phi^{n1} = \frac{1}{\omega^2} \phi^1$$

o anche

ove con l'apice 0 ed 1 si indica iterazione 0 e iterazione 1. Cioè si assegna una forma di tentativo e si ricava dall'espressione detta una forma successiva. Poiché la frequenza è incognita essa può essere inclusa nel vettore ϕ che deve essere poi normalizzato. La normalizzazione si può fare a posteriori osservando che il rapporto tra il valore effettivo di un autovettore in un punto e quello ed il suo valore normalizzato è appunto ω^2 . Pertanto eseguite un certo numero di iterazioni è possibile calcolare il quadrato della frequenza come il valore prima dell'iterazione e dopo l'iterazione ma da normalizzare:

$$\frac{1}{\omega^2} \phi^{n1} = \phi^0$$

da questa espressione si ha che il valore della frequenza si può ottenere come rapporto tra i valori che l'autovettore alla iterazione precedente e quello successivo hanno in un punto preciso della struttura. Da punto a punto tale rapporto varia, il valore esatto sarà compreso tra il massimo ed il minimo dei rapporti trovati, ovvero, pesando i valori con la distribuzione delle masse:

$$\omega^2 = \frac{\phi^{n1'} \mathbf{M} \phi^0}{\phi^{n1'} \mathbf{M} \phi^{n1}}$$

il metodo converge rapidamente, ci si ferma quando a iterazioni successive i valori ottenuti sono simili.

ad esempio nel caso in questione si ha, con l'assunzione di un autovettore iniziale unitario ai due piani:

$$\phi_0 := \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix}$$

$$(\phi_1) := K^{-1} \cdot M \cdot \phi_0$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 2.333 \times 10^{-3} \\ 3.5 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

normalizzando a 1 la prima componente si ha:

$$\phi_{a1} := \frac{\phi_1}{\phi_{11}}$$

$$\phi_0 := \phi_{a1}$$

$$\phi_1 := K^{-1} \cdot M \cdot \phi_0$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1.944 \times 10^{-3} \\ 3.111 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 := \left(\frac{\phi_1^T \cdot M \cdot \phi_0}{\phi_1^T \cdot M \cdot \phi_1} \right)^{0.5}$$

$$\omega_1 = 18.096$$

$$T_1 := 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{\omega_1}$$

$$T_1 = 0.347$$

se si vuol rendere il vettore normalizzato in modo ortonormale:

$$c := \phi_1^T \cdot M \cdot \phi_1$$

$$\phi_1 := \frac{\phi_1}{c^{0.5}}$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.116 \\ 0.185 \end{pmatrix}$$

$$\phi_1^T \cdot M \cdot \phi_1 = 1$$

3.2 CALCOLO DELLA RISPOSTA: METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Equazioni modali e fattori di partecipazione

Una volta valutati i modi di vibrare e le frequenze proprie del sistema è possibile calcolare la risposta sismica del nostro telaio. Spesso in fase progettuale si adotta quello che viene usualmente denominato **metodo della sovrapposizione modale**.

L'idea base del metodo è legata alla proprietà di ortonormalità degli autovettori e alla normalizzazione degli stessi rispetto alla matrice delle masse che rendono disaccoppiate le equazioni del moto. Infatti si ponga:

$$X := \Phi \cdot Y$$

dove Y è il **vettore delle coordinate normali** mentre X è il vettore degli spostamenti di piano e Φ è la matrice modale

$$\Phi := (\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n)$$

essendo n il numero dei gradi di libertà

Sostituendo le precedenti nelle equazioni del moto e premoltiplicando ambo i membri per il vettore ϕ_i trasposto si ottiene un nuovo sistema in Y , composto da n equazioni disaccoppiate, la cui generica espressione è la seguente:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{Y} + \Phi^T K \Phi Y = -\Phi^T M \ddot{x}_g$$

$$i := 1..n$$

Con la normalizzazione dei modi rispetto alla matrice delle masse l'i-ma equazione diventa

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -p_i \ddot{x}_g$$

ossia l'equazione di un generico oscillatore semplice di frequenza ω_i soggetto ad una accelerazione moltiplicata per il fattore p_i . Quest'ultimo è detto fattore di partecipazione ed è definito come segue

$$p_i := \phi_i^T \cdot M \cdot I$$

e rappresenta il lavoro compiuto dalle forze sismiche

$$M \cdot I$$

nel modo

$$\phi_i$$

E' allora chiaro che se **p_i** è alto c'è un forte coinvolgimento del modo ϕ_i nel moto imposto dal sisma. E' altrettanto chiaro che più il modo è intrecciato e più c'è la possibilità che il relativo fattore di partecipazione sia piccolo.

Smorzamento Strutturale

E' usuale considerare il singolo oscillatore smorzato con fattore di smorzamento **ξ_i** . In tal caso l'equazione diventa

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -p_i \ddot{x}_g$$

In genere il valore dello smorzamento modale viene determinato immaginando una matrice degli smorzamenti C così definita

$$C := a \cdot M + b \cdot K$$

Smorzamento alla Rayleigh

I parametri a e b vengono definiti sulla base dei due modi più importanti:

$$\phi_1^T \cdot C \cdot \phi_1 := a \cdot \phi_1^T \cdot M \cdot \phi_1 + b \cdot \phi_1^T \cdot K \cdot \phi_1$$

$$\phi_j^T \cdot C \cdot \phi_j := a \cdot \phi_j^T \cdot M \cdot \phi_j + b \cdot \phi_j^T \cdot K \cdot \phi_j$$

Ponendo

$$\phi_1^T \cdot C \cdot \phi_1 := 2 \cdot \xi_1 \cdot \omega_1$$

si ottengono le espressioni dei coefficienti a e b

$$a := 2 \cdot \xi_i \cdot \left(\frac{2 \cdot \omega_i \cdot \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \right)$$

$$b := \xi_i \cdot \frac{2}{\omega_j + \omega_i}$$

Massa eccitata

NB : la somma dei quadrati dei fattori di partecipazione è, *per effetto delle ortonormalizzazione degli autovettori*, uguale alla massa totale del sistema:

$$p_1^2 + p_2^2 = m_{tot}$$

Valutata la risposta del singolo oscillatore è sufficiente tornare al vettore X per determinare la risposta in coordinate lagrangiane. Lo spostamento di piano può essere espresso semplicemente come somma dei contributi dei singoli modi (sovrapposizione modale)

$$x_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} y_j$$

dove n è il numero dei modi

In genere è possibile considerare nella sommatoria solo i modi di vibrare più significativi. A tale scopo è utile definire la *massa eccitata dal singolo modo*:

$$\varepsilon_i := \frac{p_i^2}{m_{tot}}$$

essendo m_{tot} la massa totale dell'edificio

Valori bassi sono indice di un modo poco eccitato e che contribuisce poco alla risposta (valore basso nel termine della sommatoria). Dunque la massa eccitata è un mezzo per avere un'immediata idea di quanti modi considerare per avere una risposta attendibile.

Nel caso dell'esempio si ha:

vettore delle incidenze per moto orizzontale, detto anche vettore di trascinamento:

$$I := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fattori di partecipazione

$$p_1 := \phi_1^T M \cdot I$$

$$p_1 = 6.315$$

Fattore di partecipazione I° Modo di Vibrare

$$p_2 := \phi_2^T M \cdot I$$

$$p_2 = 1.489$$

Fattore di partecipazione II° Modo di Vibrare

$$p_T := p_1^2 + p_2^2$$

$$p_T = 42.093$$

$$2 \cdot m = 42$$

si noti il basso valore del secondo fattore di partecipazione sintomo del fatto che il secondo modo è relativamente (al primo modo) poco attivato. A tale scopo è utile anche il calcolo della massa eccitata dei singoli modi di vibrare.

$$\varepsilon_1 := \frac{p_1^2}{2 \cdot m} \cdot 100$$

$$\varepsilon_1 = 94.944$$

%

$$\varepsilon_2 := \frac{p_2^2}{2 \cdot m} \cdot 100$$

$$\varepsilon_2 = 5.279$$

%

La risposta del singolo oscillatore può essere determinata in vari modi ad esempio

1) Calcolo della risposta istante per istante con l'**Integrale di Duhamel**

2) Calcolo della risposta massima col **Metodo dello spettro di risposta**

Metodo dell'Integrale di Duhamel

$$x_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} \int_0^t -p_j \ddot{x}_g \frac{1}{\omega_j} e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin \omega_j (t-\tau) d\tau$$

Metodo dello Spettro di Risposta

Se in presenza di una accelerazione a_g lo spettro di risposta in spostamento è pari

$$S_d(\Omega_i, \xi_i)$$

la risposta massima del singolo oscillatore modale sottoposto ad un'accelerazione $\pi \cdot a_g$ sarà

$$y_{imax} := \mathbf{p}_i \cdot S_d(\Omega_i, \xi_i)$$

Passando ora in coordinate non normali il vettore degli spostamenti di piano può essere determinato con un'opportuna combinazione che in genere viene scelta come segue

$$\mathbf{x}_{max} := \mathbf{\Phi} \mathbf{y}_{imax}$$

dove il vettore \mathbf{y}_{imax} racchiude i valori massimi delle risposte dei singoli oscillatori modali

Sicché l' i -ma componente di \mathbf{x} varrà

$$x_{imax} := \sum \phi_{ij} \cdot y_{imax}$$

Usualmente la scelta del numero di modi da considerare dipende dalla % di massa eccitata dei singoli modi.

3.2.1 ESEMPIO: Calcolo della risposta di un telaio con lo spettro di risposta

Spettro di progetto nuova normativa: zona 1

$$a_{gmax} := 0.35 \cdot 9.81$$

$$a_{gmax} = 3.434$$

Caratteristiche dello spettro di risposta elastico (Categoria suolo A)

$$S_s := 1$$

$$T_B := 0.15$$

$$T_C := 0.40$$

$$T_D := 2.0$$

$$\eta := 1$$

(Smorzamento 5%)

$$q := 4$$

(Fattore di Struttura)

Spettro di risposta elastico in accelerazione

$$S_a(T) := \begin{cases} \frac{a_{gmax}}{q} \cdot S_s \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2.5 - 1) \right] & \text{if } 0 \leq T < T_B \\ \frac{a_{gmax}}{q} \cdot S_s \cdot \eta \cdot 2.5 & \text{if } T_B \leq T < T_C \\ \frac{a_{gmax}}{q} \cdot S_s \cdot \eta \cdot 2.5 \cdot \left(\frac{T_C}{T} \right) & \text{if } T_C \leq T < T_D \\ \frac{a_{gmax}}{q} \cdot S_s \cdot \eta \cdot 2.5 \cdot \left(\frac{T_C \cdot T_D}{T^2} \right) & \text{if } T_D \leq T \end{cases}$$

$$S_a(0.4) = 2.146$$

$$S_a(1) = 0.858$$

Spettro di risposta in spostamento

$$S_d(T) := \left(\frac{T}{2 \cdot \pi} \right)^2 \cdot S_a(T)$$

Nel caso del telaio dell'esempio gli spettri in spostamento e accelerazione dei singoli oscillatori modali varranno:

$$S_{d1} := p_1 \cdot S_d(T_1)$$

$$S_{d1} = 0.041$$

Spostamento massimo oscillatore modale 1

$$S_{a1} := p_1 \frac{S_a(T_1)}{9.81}$$

$$S_{a1} = 1.381$$

Accelerazione massima oscillatore modale 1 (in g)

$$S_{d2} := p_2 \cdot S_d(T_2)$$

$$S_{d2} = 1.325 \times 10^{-3}$$

Spostamento massimo oscillatore modale 2

$$S_{a2} := p_2 \frac{S_a(T_2)}{9.81}$$

$$S_{a2} = 0.303$$

Accelerazione massima oscillatore modale 2 (in g)

E dunque la risposta massima ai singoli piani varrà

Vettore degli spostamenti di piano

$$Y := \begin{pmatrix} 0.041 \\ 0.001325 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.116 & 0.186 \\ 0.185 & -0.115 \end{pmatrix}$$

$$X := \Phi \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 5.033 \times 10^{-3} \\ 7.507 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

In modo formalmente equivalente si può scrivere:

$$u^{(i)} := \Phi^{(i)} \cdot Y_i \quad X_{\text{max}} := \sum_{n=0}^1 u^{(n)}$$

Ove con $u(i)$ si sono indicati i vettori colonna dei contributi dei singoli modi.

3.2.2 Criteri di sovrapposizione modale con l'uso dello spettro di risposta

La formulazione sopra riportata è corretta se applicata alla risposta $Y(t)$, è una stima per eccesso della risposta, infatti i massimi delle due coordinate Y non sono contemporanei.

Si adotta usualmente uno dei due metodi di seguito indicati:

$$E = (\sum E_i^2)^{1/2}$$

$$E = (\sum_i \sum_j \rho_{ij} E_i E_j)^{1/2}$$

Dove con E è indicato il contributo di ciascun modo alla risposta.

il primo criterio si applica come riportato di seguito:

$$X_{\max} := \left[\sum_{n=0}^1 \left(u_{\langle n \rangle} \right)^2 \right]^{0.5} \quad X_{\max} = \begin{pmatrix} 4.793 \times 10^{-3} \\ 7.661 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Il secondo criterio di sovrapposizione modale è più preciso, tiene conto della correlazione tra i modi, dovuta alla vicinanza delle frequenze ed allo smorzamento. La prima formulazione della correlazione modale è dovuta a Roseblueth ed Elourdy, così come la formula di combinazione. Qui si mostra la formulazione suggerita da Der Kiureghian :

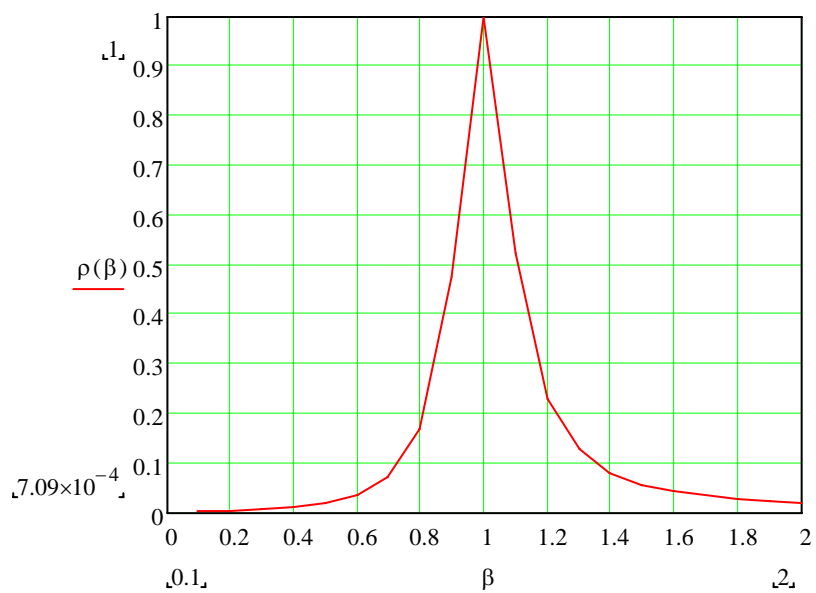
$$\beta := \frac{T_1}{T_0} \quad \rho := \frac{8 \cdot \xi^2 \cdot (1 + \beta) \cdot \beta^{\frac{3}{2}}}{(1 - \beta^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \beta \cdot (1 + \beta)^2} \quad \rho = 8.856 \times 10^{-3}$$

$$X_{\max 1} := \left[\left[\sum_{n=0}^1 \left(u_{\langle n \rangle} \right)^2 \right] + \rho \cdot u_v \right]^{0.5} \quad X_{\max 1} = \begin{pmatrix} 4.794 \times 10^{-3} \\ 7.66 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Mettiamo a confronto i tre risultati ottenuti con i tre criteri di sovrapposizione modale:

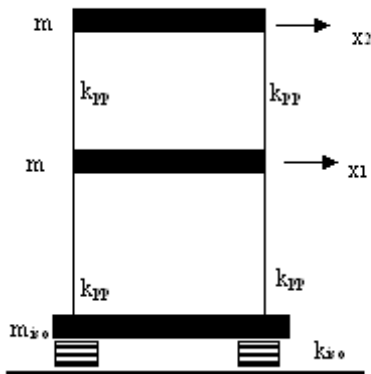
$$X = \begin{pmatrix} 5.033 \times 10^{-3} \\ 7.507 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad X_{\max} = \begin{pmatrix} 4.793 \times 10^{-3} \\ 7.661 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad X_{\max 1} = \begin{pmatrix} 4.794 \times 10^{-3} \\ 7.66 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Si osserva come il primo criterio, eccessivamente cautelativo, dia risultati non particolarmente più gravosi in questo caso. Esso rappresenta una stima per eccesso. Il secondo ed il terzo criterio danno luogo a risultati pressoché coincidenti. Questo fatto è dovuto alla scarsa correlazione modale. Infatti i periodi propri sono piuttosto lontani: 0.35 e 0.14 secondi. La correlazione è sempre pressoché nulla al di sopra di una distanza di 0.1 secondi.



Correlazione modale al variare del rapporto tra i periodi: $\beta = T_1/T_2$

3.3 TELAIIO SHEAR-TYPE 2 PIANI ISOLATO ALLA BASE



PREDIMENSIONAMENTO SISTEMA DI ISOLAMENTO

periodo di progetto struttura isolata

$$T_{iso} := 2$$

Massa base isolamento

$$m_{iso} := m$$

$$m_{iso} = 21$$

Massa totale del sistema di isolamento e della sovrastruttura

$$m_{tot} := 2 \cdot m + m_{iso}$$

$$m_{tot} = 63$$

Calcolo rigidezza della base isolata considerando la sovrastruttura rigida

$$k_{iso} := \frac{4 \cdot \pi^2}{T_{iso}^2} \cdot m_{tot}$$

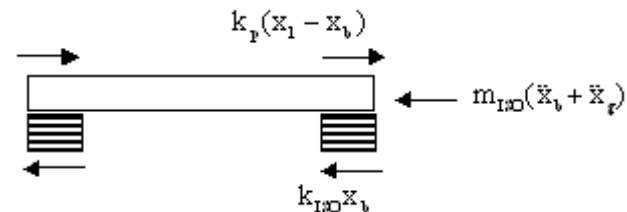
$$k_{iso} = 621.785$$

3.3.1 MATRICI DEL SISTEMA DI EQUAZIONI DEL MOTO

$$\underline{\underline{M}} := \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}} := \begin{pmatrix} k_p + k_{iso} & -k_p & 0 \\ -k_p & 2k_p & -k_p \\ 0 & -k_p & k_p \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1.862 \times 10^4 & -1.8 \times 10^4 & 0 \\ -1.8 \times 10^4 & 3.6 \times 10^4 & -1.8 \times 10^4 \\ 0 & -1.8 \times 10^4 & 1.8 \times 10^4 \end{pmatrix}$$


3.3.2 CALCOLO DELLE FREQUENZE E PERIODI PROPRI DEL TELAIO

- Uso del problema agli autovalori generalizzato implementato in Mathcad

$FQUAD := \text{genvals}(K, M)$

$$FQUAD = \begin{pmatrix} 2.576 \times 10^3 \\ 872.073 \\ 9.682 \end{pmatrix}$$

(FREQUENZE PROPRIE)

$\Omega := \sqrt{FQUAD}$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 50.759 \\ 29.531 \\ 3.112 \end{pmatrix}$$

$T := 2 \cdot \pi \cdot \Omega^{-1}$

$$T = \begin{pmatrix} 0.124 \\ 0.213 \\ 2.019 \end{pmatrix}$$

(PERIODI PROPRI)

Si noti come la prima frequenza sia prossima alla frequenza del sistema considerando la sovrastruttura rigida e che la seconda frequenza sia relativamente più grande

$$\Omega_1 \cong \omega_{iso}$$

$$\omega_{iso} := \sqrt{\frac{k_{iso}}{3m}}$$

$$\omega_{iso} = 3.142$$

$$\omega_{bas} := \sqrt{\frac{k_{iso}}{m}}$$

$$\omega_{bas} = 5.441$$

Nel caso di azione sismica questo fatto risulta estremamente rilevante in quanto l'aumento del periodo proprio della struttura porta la struttura verso zone dello spettro di progetto con ordinate più basse, con conseguenti minori azioni sulla struttura.

3.3.3 CALCOLO DEGLI AUTOVALORI

1) metodo della componente unitaria

Imponendo la condizione che almeno una componente di ciascun autovettore sia 1 si ha:

Autovettore ϕ_1

$$\phi_{11} := 1$$

$$E_1 := K - (\Omega_{2,0})^2 \cdot M$$

$$E_{11} := \text{submatrix}(E_1, 1, 2, 1, 2)$$

$$E_{10} := \text{submatrix}(E_1, 1, 2, 0, 0)$$

$$\phi_{21} := -E_{11}^{-1} \cdot E_{10}$$

$$\phi_{1a} := \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21_{0,0}} \\ \phi_{21_{1,0}} \end{pmatrix}$$

$$\phi_{1a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.023 \\ 1.035 \end{pmatrix}$$

Autovettore ϕ_2

$$\phi_{11} := 1$$

$$E_1 := K - (\Omega_{1,0})^2 \cdot M$$

$$E_{11} := \text{submatrix}(E_1, 1, 2, 1, 2)$$

$$E_{10} := \text{submatrix}(E_1, 1, 2, 0, 0)$$

$$\phi_{21} := -E_{11}^{-1} \cdot E_{10}$$

$$\phi_{2a} := \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21_{0,0}} \\ \phi_{21_{1,0}} \end{pmatrix}$$

$$\phi_{2a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.017 \\ -0.983 \end{pmatrix}$$

Autovettore ϕ_3

$$\phi_{11} := 1$$

$$E_1 := K - (\Omega_{0,0})^2 \cdot M$$

$$E_{11} := \text{submatrix}(E_1, 1, 2, 1, 2)$$

$$E_{10} := \text{submatrix}(E_1, 1, 2, 0, 0)$$

$$\phi_{21} := -E_{11}^{-1} \cdot E_{10}$$

$$\phi_{3a} := \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21_{0,0}} \\ \phi_{21_{1,0}} \end{pmatrix}$$

$$\phi_{3a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.971 \\ 0.983 \end{pmatrix}$$

2) metodo della normalizzazione della matrice delle masse

$$C_1 := \sqrt{\frac{1}{\phi_{1a}^T \cdot M \cdot \phi_{1a}}}$$

$$\phi_1 := C_1 \cdot \phi_{1a}$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.124 \\ 0.126 \\ 0.128 \end{pmatrix}$$

$$C_2 := \sqrt{\frac{1}{\phi_{2a}^T \cdot M \cdot \phi_{2a}}}$$

$$\phi_2 := C_2 \cdot \phi_{2a}$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} 0.156 \\ 2.665 \times 10^{-3} \\ -0.153 \end{pmatrix}$$

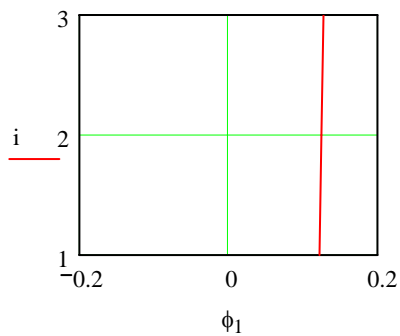
$$C_3 := \sqrt{\frac{1}{\phi_{3a}^T \cdot M \cdot \phi_{3a}}}$$

$$\phi_3 := C_3 \cdot \phi_{3a}$$

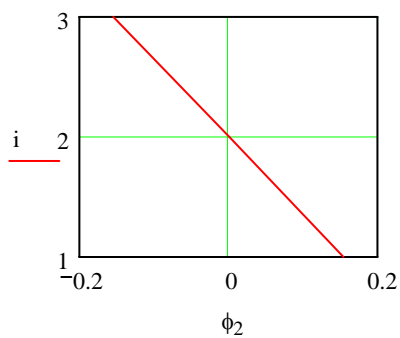
$$\phi_3 = \begin{pmatrix} 0.09 \\ -0.178 \\ 0.089 \end{pmatrix}$$

i :=

	0	1
0	1	
1	2	

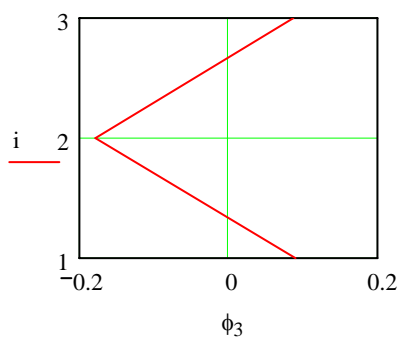


I° modo di vibrare



II° modo di vibrare

NB : Il primo modo è tale che la sovrastruttura praticamente si muova rigidamente sul basamento isolato e che tutta la deformazione sia concentrata negli isolatori. Come si dimostrerà nel successivo calcolo delle masse eccitate ad esso è associata la quasi totalità della massa eccitata e dunque nella sovrastruttura giungono sollecitazioni assai ridotte rispetto al caso non isolato



III° modo di vibrare

3.3.4 CALCOLO FATTORI DI PARTECIPAZIONE

vettore delle incidenze per moto orizzontale

$$\underline{I} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vettore dei fattori di partecipazione

$$p_1 := \phi_1^T M \cdot I$$
$$p_1 = 7.936$$

$$p_2 := \phi_2^T M \cdot I$$
$$p_2 = 0.111$$

$$p_3 := \phi_3^T M \cdot I$$
$$p_3 = 0.022$$

si noti il basso valore del secondo indice di partecipazione sintomo del fatto che il secondo modo è relativamente (al primo modo) poco attivato. A tale scopo è utile anche il calcolo della massa eccitata dal modo i-mo.

verifichiamo che la somma dei quadrati dei fattori di partecipazione sia la massa totale del sistema isolato

$$p^T := p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$
$$p^T = 63$$

3.3.5 CALCOLO DELLA MASSE ECCITATE

per definizione la massa eccitata del modo i-mo è il rapporto tra il quadrato del fattore di partecipazione e la massa totale del sistema

$$\varepsilon_1 := \frac{p_1^2}{3 \cdot m} \cdot 100$$
$$\varepsilon_1 = 99.98$$

NB : la massa eccitata associata al primo modo di vibrare è la quasi totalità della massa eccitata

$$\varepsilon_2 := \frac{p_2^2}{3 \cdot m} \cdot 100$$
$$\varepsilon_2 = 0.02$$

$$\varepsilon_3 := \frac{p_3^2}{3 \cdot m} \cdot 100$$
$$\varepsilon_3 = 7.523 \times 10^{-4}$$

si noti come il primo modo rappresenti di fatto il 100% della massa eccitata, questo è abbastanza tipico dei sistemi ben isolati

3.3.6 CALCOLO DELLA RISPOSTA SISMICA : Metodo dello Spettro di Risposta

Spettro di progetto nuova normativa: zona 1

$$a_{gmax} := 0.35 \cdot 9.81$$

$$a_{gmax} = 3.434$$

Caratteristiche dello spettro di risposta elastico (Categoria suolo A)

$$S_s := 1$$

$$T_B := 0.15$$

$$T_C := 0.40$$

$$T_D := 2.0$$

$$\eta := 1$$

(Smorzamento 5%)

$$q := 1$$

(Fattore di Struttura: deve restare elastica)

Spettro di risposta elastico in accelerazione

$$S_a(T) := \begin{cases} \frac{a_{gmax}}{q} \cdot S_s \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2.5 - 1) \right] & \text{if } 0 \leq T < T_B \\ \frac{a_{gmax}}{q} \cdot S_s \cdot \eta \cdot 2.5 & \text{if } T_B \leq T < T_C \\ \frac{a_{gmax}}{q} \cdot S_s \cdot \eta \cdot 2.5 \cdot \left(\frac{T_C}{T} \right) & \text{if } T_C \leq T < T_D \\ \frac{a_{gmax}}{q} \cdot S_s \cdot \eta \cdot 2.5 \cdot \left(\frac{T_C \cdot T_D}{T^2} \right) & \text{if } T_D \leq T \end{cases}$$

Spettro di risposta in spostamento

$$S_d(T) := \left(\frac{T}{2 \cdot \pi} \right)^2 \cdot S_a(T)$$

Nel caso del telaio dell'esempio gli spettri in spostamento e accelerazione dei singoli oscillatori modali varranno:

$$S_{d1} := P_1 \cdot S_d(T_{0,0})$$

$$S_{d1} = 0.024$$

Spostamento massimo oscillatore modale 1

$$S_{a1} := P_1 \cdot \frac{S_a(T_{0,0})}{9.81}$$

$$S_{a1} = 6.216$$

Accelerazione massima oscillatore modale 1 (in g)

$$S_{d2} := p_2 \cdot S_d(T_{1,0})$$

$$S_{d2} = 1.092 \times 10^{-3}$$

Spostamento massimo oscillatore modale 2

$$S_{a2} := p_2 \frac{S_a(T_{1,0})}{9.81}$$

$$S_{a2} = 0.097$$

Accelerazione massima oscillatore modale 2 (in g)

$$S_{d3} := p_3 \cdot S_d(T_{2,0})$$

$$S_{d3} = 3.787 \times 10^{-3}$$

Spostamento massimo oscillatore modale 2

$$S_{a3} := p_3 \frac{S_a(T_{2,0})}{9.81}$$

$$S_{a3} = 3.737 \times 10^{-3}$$

Accelerazione massima oscillatore modale 2 (in g)

E dunque la risposta massima ai singoli piani vale

$$Y_0 := S_{d1}$$

$$Y_1 := S_{d2}$$

$$Y_2 := S_{d2}$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} \phi_{1_0} & \phi_{2_0} & \phi_{3_0} \\ \phi_{1_1} & \phi_{2_1} & \phi_{3_1} \\ \phi_{1_2} & \phi_{2_2} & \phi_{3_2} \end{pmatrix}$$

$$\phi_{1_0} :=$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.024 \\ 1.092 \times 10^{-3} \\ 1.092 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.124 & 0.156 & 0.09 \\ 0.126 & 2.665 \times 10^{-3} & -0.178 \\ 0.128 & -0.153 & 0.089 \end{pmatrix}$$

Vettore degli spostamenti di piano

$$X := \Phi \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 3.193 \times 10^{-3} \\ 2.802 \times 10^{-3} \\ 2.957 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

In effetti in generale *il sistema di isolamento dà luogo ad uno smorzamento: ξ_i , superiore al 5%. Se si assume : $\xi_i = 12\%$, che agisce sul solo modo, la risposta può valutarsi riducendo la risposta spettrale moltiplicando i valori dello spettro di risposta, relativi ai modi interessati dalla distorsione del sistema di isolamento, per la seguente espressione:*

$$\xi_i := 12$$

$$\eta := \sqrt{\frac{10}{5 + \xi_i}}$$

$$\eta = 0.767$$

$$S_{d1} := \eta \cdot p_1 \cdot S_d(T_{0,0})$$

$$S_{d1} = 0.018$$

$$S_{a1} := \eta \cdot p_1 \frac{S_a(T_{0,0})}{9.81}$$

$$S_{a1} = 4.768$$

E dunque la risposta massima ai singoli piani, nel caso di smorzamento del sistema di isolamento pari al 12% vale

$$Y_0 := S_{d1}$$

$$Y_1 := S_{d2}$$

$$Y_2 := S_{d2}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.018 \\ 1.092 \times 10^{-3} \\ 1.092 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.124 & 0.156 & 0.09 \\ 0.126 & 2.665 \times 10^{-3} & -0.178 \\ 0.128 & -0.153 & 0.089 \end{pmatrix}$$

Vettore degli spostamenti di piano con smorzamento dell'isolamento=12%

$$X := \Phi \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 2.512 \times 10^{-3} \\ 2.104 \times 10^{-3} \\ 2.251 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso valgono le considerazioni fatte per la sovrapposizione modale nel caso del telaio convenzionale.

L'applicazione del metodo CQC (composizione quadratica completa) richiede l'uso della espressione della correlazione relativa al caso di smorzamenti differenti (si veda il file Mathcad per i dettagli e le differenze di risultato).

L'espressione completa dovuta a Der Kiureghian è la seguente:

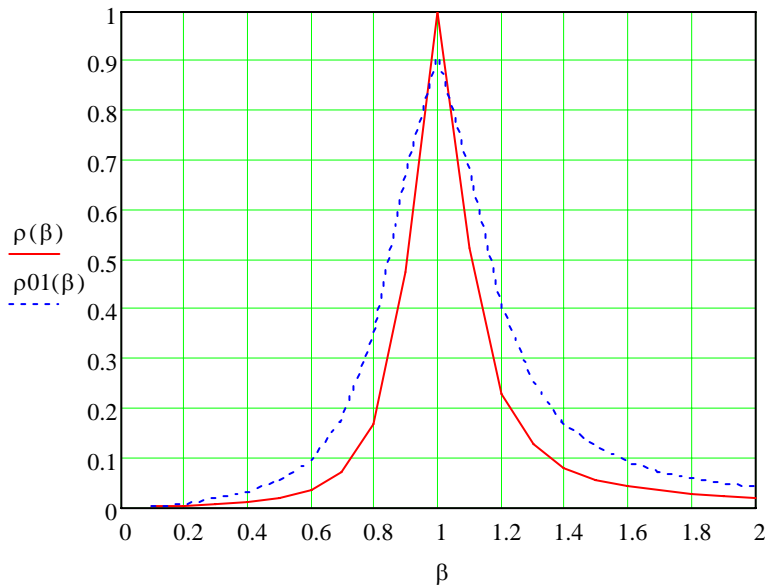
$$\rho_{01} := \frac{8 \cdot (\xi \cdot \xi_0)^{0.5} \cdot (\xi_0 + \xi \cdot \beta_{01}) \cdot \beta_{01}^{\frac{3}{2}}}{(1 - \beta_{01}^2)^2 + 4 \cdot (\xi \cdot \xi_0) \cdot \beta_{01} \cdot (1 + \beta_{01}^2) + 4 \cdot (\xi_0^2 + \xi^2) \cdot \beta_{01}^2}$$

$\rho_{01} = 0.069$
 $\rho_{02} = 5.426 \times 10^{-4}$

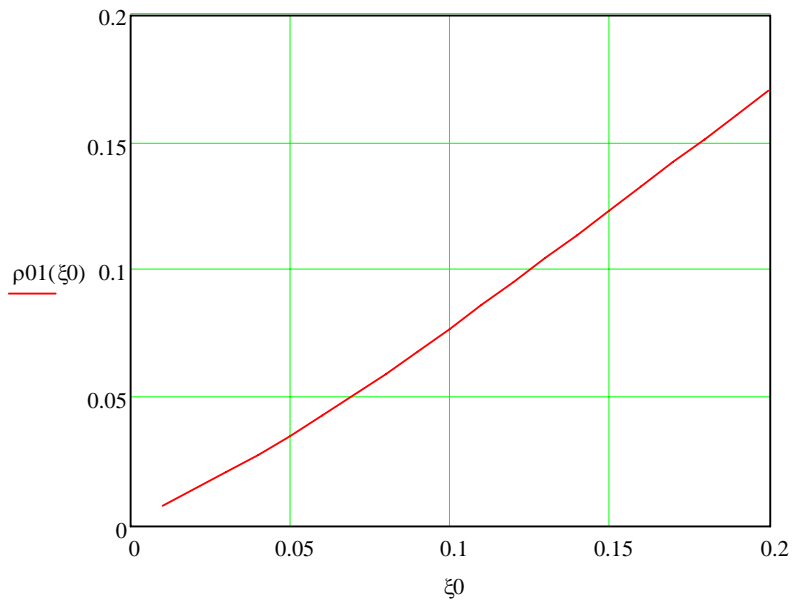
Nella formula β_{01} è il rapporto tra la frequenza del primo e del secondo modo, ξ_0 è lo smorzamento del primo modo, dovuto essenzialmente agli isolatori, pari al 12%.

$$X_{mmax} = \begin{pmatrix} 2.413 \times 10^{-3} \\ 2.298 \times 10^{-3} \\ 2.155 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad X_{max} = \begin{pmatrix} 2.25 \times 10^{-3} \\ 2.296 \times 10^{-3} \\ 2.328 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad X_{max1} = \begin{pmatrix} 2.281 \times 10^{-3} \\ 2.392 \times 10^{-3} \\ 2.346 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

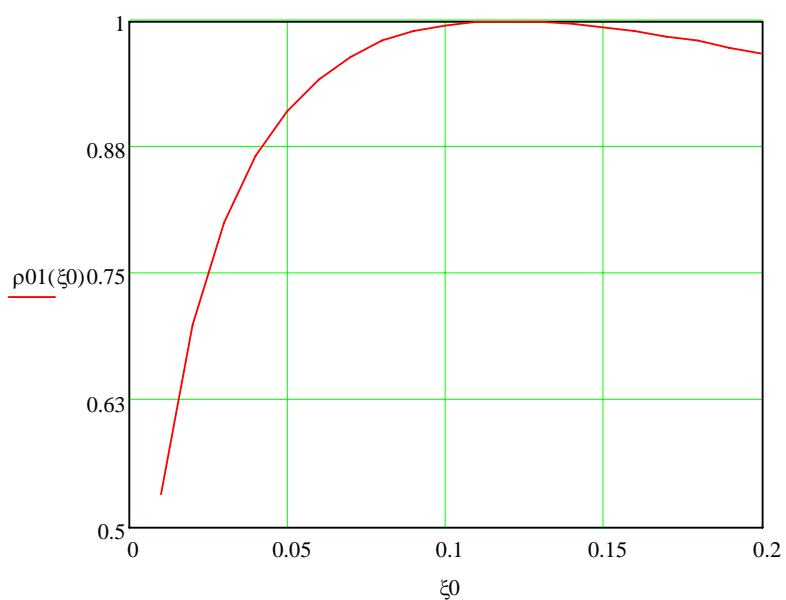
Si veda come in questo caso la correlazione modale sia leggermente più influente per effetto dello smorzamento del 12% del primo modo. L'andamento della correlazione modale ρ al variare del rapporto tra i periodi è riportato nella figura in basso. Nella successiva è riportata la variazione di ρ se un modo ha smorzamento 5% al variare dello smorzamento dell'altro se il rapporto β tra le frequenze modali vale 0.6 o il reciproco 1.67. Si vede che l'incremento dello smorzamento ha una influenza sensibile. Nel caso dell'isolamento è possibile che i modi isolati abbiano frequenze simili se non addirittura coincidenti. In tal caso il valore di ρ può essere elevato e la sovrapposizione di tipo CQC diviene particolarmente valida se non indispensabile.



Funzione di correlazione ρ al variare del rapporto β tra le frequenze modali: ρ - per smorzamento costante nei due modi pari a 0.05, ρ_0 - per smorzamento pari al 5% in un modo ed al 12% nell'altro.



Funzione di correlazione ρ per un rapporto β tra le frequenze modali pari a 0.6 \therefore ρ_0 - per smorzamento pari al 5% in un modo ed al 12% nell'altro



Funzione di correlazione ρ per un rapporto β tra le frequenze modali pari a 1 : per smorzamento pari al 12% in un modo ed variabile sino al 20% nell'altro

4 Le analisi di spinta

Se si usa il metodo delle coordinate generalizzate, assumendo che il vettore spostamento sia descritto da una deformata ϕ , un vettore che dà lo spostamento della struttura relativo a ciascun grado di libertà, modulato da uno scalare $y(t)$, l'equazione di equilibrio di una struttura a più gradi di libertà:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_g \quad (1)$$

Può essere riscritto come:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{y} + \mathbf{K}\Phi y = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_g \quad (2)$$

Che premoltiplicando per la trasposta della deformazione dà luogo alla equazione (principio dei lavori virtuali):

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{y} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi y = -\Phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_g \quad (3)$$

Si può riscrivere la (3) nella forma consueta:

$$m\ddot{y} + ky = L\ddot{x}_g \quad (4)$$

Si supponga di aver normalizzato ad 1 la deformata in corrispondenza di un grado di libertà di piano. Con tale assunzione il valore di y coincide con lo spostamento del grado di libertà ove il vettore di forma vale 1.

Dividendo per la massa generalizzata la (4) assume la usuale forma:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = p\ddot{x}_g \quad (5)$$

Dividendo per il coefficiente di partecipazione p si ottiene:

$$\frac{\ddot{y}}{p} + \omega^2 \frac{y}{p} = \ddot{x}_g \quad (6)$$

La (6) può essere vista come l'equazione di equilibrio di un oscillatore semplice la cui risposta è data in termini di spostamento relativo: $u=y/p$.

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \ddot{x}_g \quad (6)$$

Il termine L che nella (4) moltiplica l'accelerazione del terreno può essere visto come la massa m^* di un oscillatore semplice equivalente:

$$\phi^T M I = m^* = L$$

Moltiplicando primo e secondo membro dell (6) per m^* si ottiene:

$$m^* \frac{\ddot{y}}{p} + m^* \omega^2 \frac{y}{p} = m^* \ddot{x}_g \quad (6')$$

Poiché:

$$\omega^2 = k/m.$$

sostituendo nella (6') si ottiene:

$$m^* \frac{\ddot{y}}{p} + m^* \frac{k}{m} \frac{y}{p} = m^* \ddot{x}_g \quad (6'')$$

$$m^* \frac{\ddot{y}}{p} + (kp) \frac{y}{p} = m^* \ddot{x}_g \quad (7)$$

Il taglio alla base della struttura soggetta alle forze $F=Kx = K\phi y$, è dato da: $V = F^T I = I^T F$. Se si usano le forme modali vale la relazione:

$$F = K\phi y = \omega^2 M\phi y \quad (8)$$

Se si premoltiplica la (8) per il vettore I^T di trascinamento orizzontale si ottiene, come appena visto, il taglio alla base della struttura:

$$V(y) = I^T F = I^T K\phi y = I^T \omega^2 M\phi y = \omega^2 I^T M\phi y = \omega^2 L y = k \frac{L}{m} \cdot y = k \cdot p \cdot y \quad (9)$$

Pertanto sostituendo il risultato della (9) nella (7), si ottiene:

$$m\ddot{y} + \frac{V(y)}{p} = L\ddot{x}_g \quad (10)$$

Sino a che il legame è lineare si ha che V è proporzionale a y , pertanto $V(y)/p = V(y/p)$:

$$L \frac{\ddot{y}}{p} + \frac{V(y)}{p} = L\ddot{x}_g; \frac{V(y)}{p} = V\left(\frac{y}{p}\right); \quad (11)$$

$$L \frac{\ddot{y}}{p} + V\left(\frac{y}{p}\right) = L\ddot{x}_g; \quad (12)$$

La (12) può scriversi:

$$L \cdot \ddot{u} + V(u) = L\ddot{x}_g; u = \frac{y}{p} \quad (13)$$

Se il legame è lineare tra V ed y vale la (13). Essa rappresenta la equazione di equilibrio dinamico dell'oscillatore equivalente alla struttura.

Quando l'oscillatore semplice si sposta di u , la struttura si sposta di $y = p u$.

La forza di richiamo ha il legame tra forza e spostamento della struttura. Pertanto la rigidezza k è proprio quella della struttura. Tuttavia, la forza massima alla base dell'oscillatore equivalente non lineare si ha quando l'oscillatore raggiunge uno spostamento u corrispondente a quello y di snervamento della struttura diviso per p . Ne segue che la massima reazione V che si può avere nell'oscillatore equivalente vale $(V_y)/p$ pari al taglio massimo di snervamento alla base della struttura diviso per p .

Se si normalizza a 1 l'autovettore in corrispondenza della copertura, la curva di spinta corrisponde a quella in cui in ascissa è riportato lo spostamento di sommità (ove l'autovettore vale 1) ed in ordinate il taglio alla base.

La massa è data dalla somma delle masse pesate ciascuna per il valore dell'autovettore al livello della massa.

Il coefficiente di partecipazione p vale $p = L/(\phi' M \phi)$.

4.1 Caratteristiche dell'Oscillatore Equivalente ad una Struttura

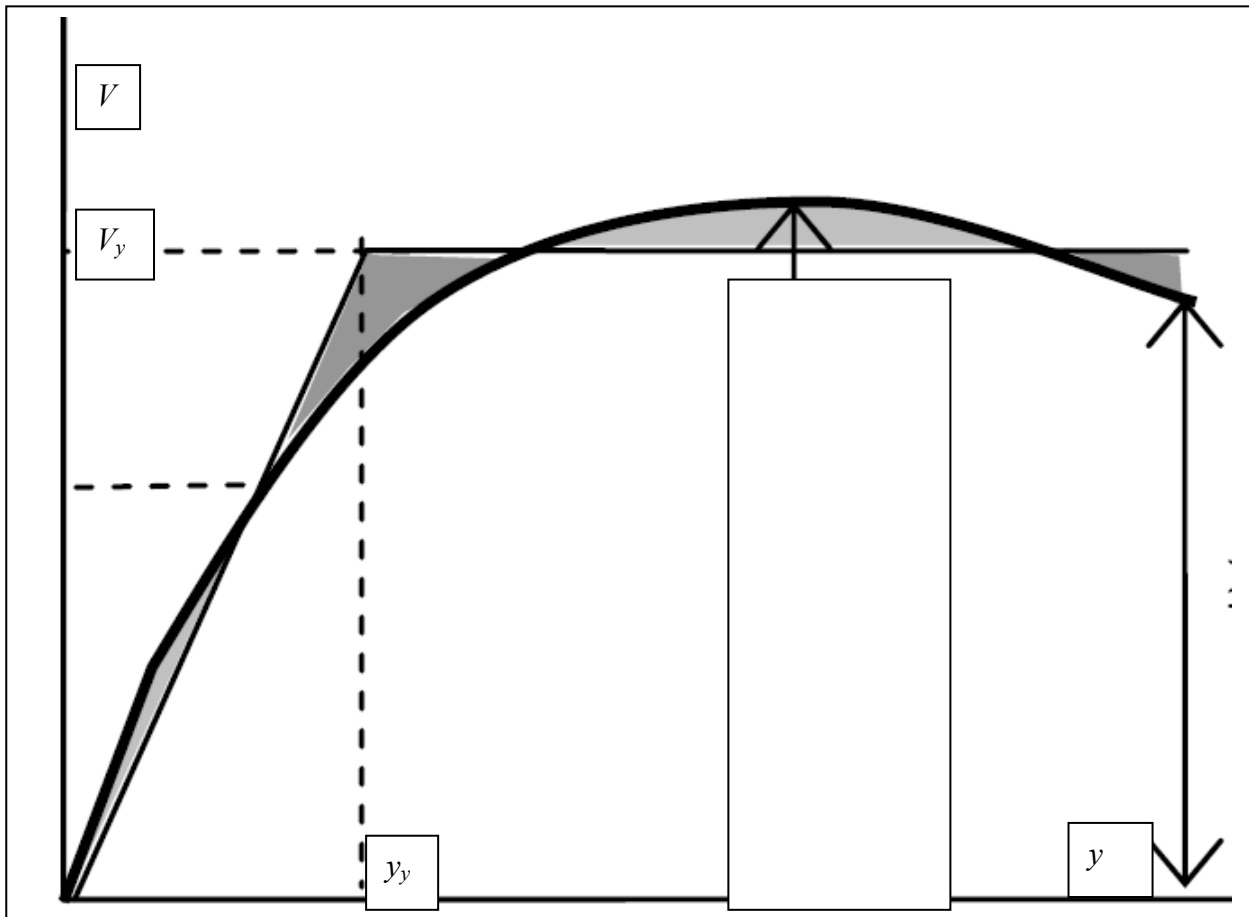


Figura 11- Legame elasto plastico perfetto e curva reale

Si consideri una struttura, che sottoposta ad un sistema di forze F distribuito in modo proporzionale al prodotto delle masse per un vettore di forma, abbia un legame taglio alla base spostamento in sommità elasto perfettamente plastico, quale quello bilatero di figura. Il punto y_y rappresenta lo spostamento in sommità (se l'autovettore vale 1 in sommità, sennò è il punto dove l'autovettore vale 1) cui corrisponde lo snervamento.

Il valore d_y^* corrisponde a y_y / p , il valore F_y^* corrisponde a V_y / p . La massa dell'oscillatore è la somma delle masse pesate dall'ampiezza del modo in corrispondenza a ciascuna massa:

$$\phi^T M I = m^* = L = \sum m_i \cdot \phi_i$$

Il coefficiente di partecipazione p è dato naturalmente da:

$$\frac{\phi' M \phi}{\phi' M \phi} = p = \frac{m^*}{\sum m_i \phi_i^2}$$

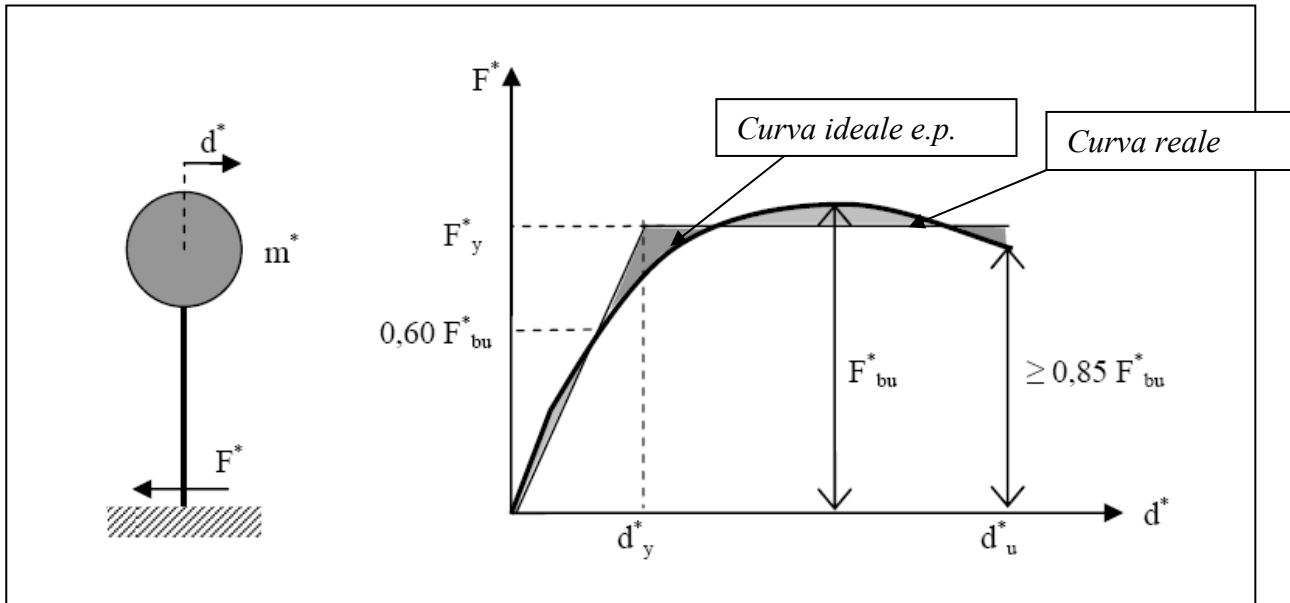


Figura 12 legame dell'oscillatore equivalente, ripreso dalla Circolare esplicativa delle Norme Italiane.

Le curve di spinta reali sono difficilmente elastiche perfettamente plastiche. In genere hanno un andamento quale quello in Figura 12. Vi sono vari criteri per ottenere dalla curva non lineare reale quella equivalente elastica perfettamente plastica.

La norma Italiana, nella circolare esplicativa, dà il criterio riportato in Figura 12. Detta F_{bu} la resistenza massima del sistema strutturale reale ed $F_{bu}^* = F_{bu}/p$ la resistenza massima del sistema equivalente, il tratto elastico si individua imponendone il passaggio per il punto in cui il taglio alla base vale $0,6 F_{bu}$, il punto di plasticizzazione (d_y^* ; F_y), e quindi il valore F_y si individua imponendo l'uguaglianza delle aree sottese dalla curva bilineare e dalla curva di capacità per lo spostamento massimo d_u^* corrispondente ad una riduzione di resistenza $\leq 0,15 F_{bu}^*$.

Si tratta naturalmente di un procedimento convenzionale, che pretenderebbe di dar luogo ad una struttura che dà la stessa risposta in spostamento della struttura vera. In linea di massima la rigidezza iniziale:

$$k^* = F_y / d_y^*$$

è poco differente da quella elastica iniziale della struttura, ma comunque è minore. Il periodo così determinato vale:

$$T^* = 2\pi(m^*/k^*)^{1/2}$$

4.2 Valutazione della risposta massima in spostamento dell'oscillatore equivalente.

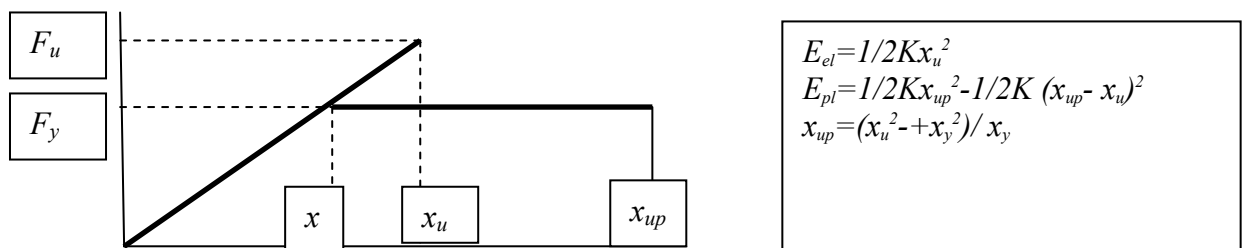
Vi possono essere vari modi per valutare la risposta dell'oscillatore equivalente. Se si ha a disposizione un accelerogramma si può valutare la risposta per integrazione al passo mediante analisi non lineare dinamica. L'ipotesi di comportamento della struttura è elasto plastica.

In realtà le strutture difficilmente hanno un comportamento elastico perfettamente plastico, pertanto la risposta va valutata con il "reale" modello non lineare ciclico della struttura. Esso potrebbe, in linea di principio, essere ricavato con una analisi di spinta ciclica.

In generale si fa ricorso a modelli semplificati noti, quali appunto quello elasto plastico perfetto, oppure incrudente (se dopo lo snervamento la retta relativa al legame ha inclinazione diversa da 0, oppure un legame del tipo Takeda, per strutture in cemento armato, o legami più complessi.

Un metodo semplificato per la stima della risposta non lineare, è quello di assumere che, se la struttura è a comportamento perfettamente plastico, lo spostamento massimo sia lo stesso della struttura elastica.

. Figura 13 Criterio di uguaglianza tra massima energia di deformazione



Questo criterio è valido per le strutture a periodo lungo. Per le strutture rigide in genere è più approssimato il criterio di utilizzare l'uguaglianza dell'energia massima di deformazione tra struttura elastica ed elasto plastica.

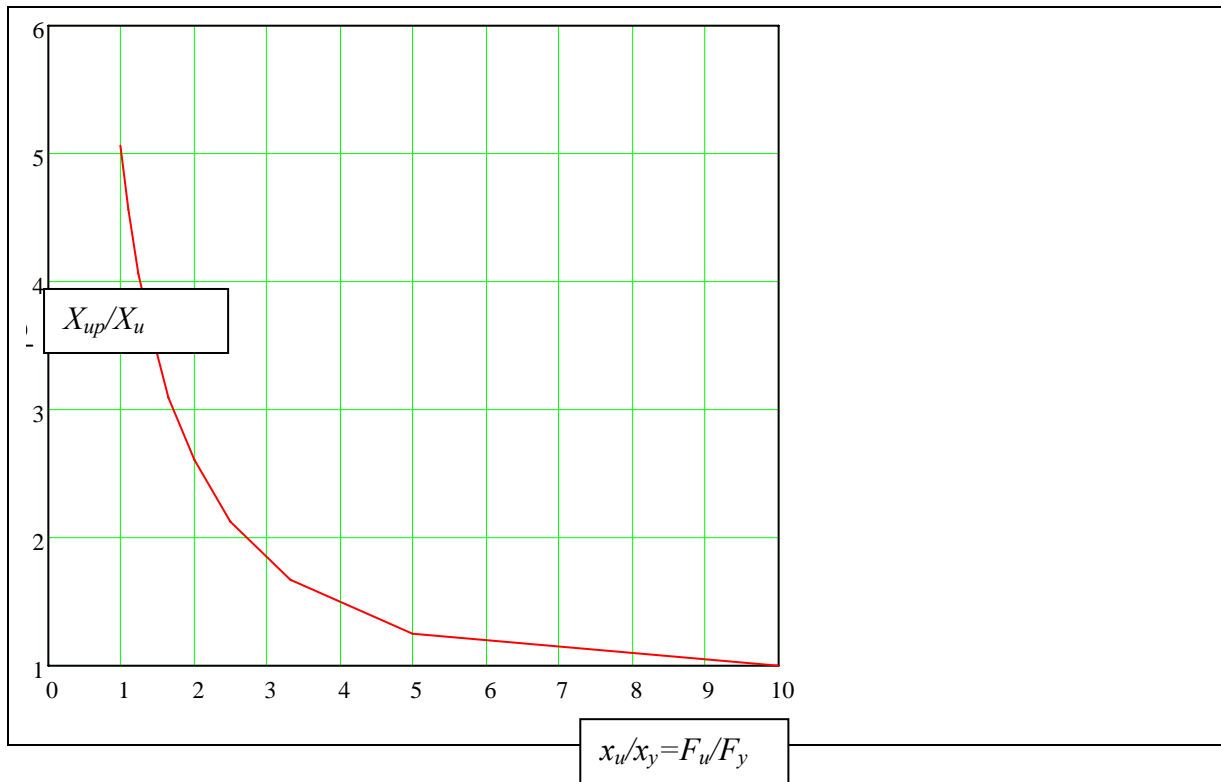


Figura 14 legame tra spostamento massimo della struttura elasto plastica ed elastica col criterio di uguale energia

Si tratta di capire quando una struttura è flessibile (a periodo lungo) o rigida (a periodo corto). Fishinger [1999] ha suggerito di legare l'individuazione delle strutture a periodo corto o lungo dal confronto con l'ordinata T_c dello spettro di risposta. È l'ordinata ove finisce la zona di massima amplificazione della accelerazione (tratto costante dello spettro di progetto in accelerazione). Se $T > T_c$ la risposta elasto plastica è quindi uguale a quella elastica, pari cioè allo spettro elastico in spostamento.

Se $T < T_c$ la risposta è data dalla seguente espressione:

$$d = \left[1 - (q - 1) \times \frac{T_c}{T^*} \right] \frac{S_d(T^*)}{S_d(T^*) \times m^*}$$

Se il legame non è elastico perfettamente plastico, l'espressione sopra indicata perde di validità sempre più al ridursi della dissipazione strutturale. Normalmente le strutture dissipano meno rispetto al legame elastico plastico. Un criterio per capire la differenza è quella di sovrapporre il ciclo di isteresi della struttura a quello elastico plastico perfetto. Il rapporto tra le energie dissipate, cioè tra le aree incluse nei cicli dà una misura della attendibilità delle espressioni sopra riportate. Per ovviare a questo problema si possono utilizzare vari criteri. In alcuni casi sono state fatte analisi di confronto tra strutture che dissipano meno rispetto a quella elastica, trovando dei coefficienti di correzione (incremento) della risposta non lineare, che sono funzione del rapporto delle energie dissipate.

Un criterio più fisico, è quello di trovare la struttura elastico viscosa equivalente a quella elastico plastica. Si parte cioè dall'idea che se due strutture dissipano la stessa quantità di energia debbono avere risposte dinamiche simili. Naturalmente questa ipotesi deve essere, ed in effetti, almeno sino a valori non eccessivi della energia dissipata, essa dà risultati ragionevoli. Di questo problema tratta un notevole filone di ricerca noto appunto con il nome di "linearizzazione equivalente". E' possibile cercare la struttura lineare equivalente ottimale per ottenere diverse grandezze di risposta. Nel caso qui esaminato si cerca quella che dà la stessa risposta massima in spostamento. Molti autori cercano invece la struttura che minimizza lo scarto quadratico medio tra la storia di spostamento della struttura non lineare e quella della struttura elastico viscosa equivalente. Se ad esempio si pesano maggiormente gli spostamenti massimi, i due obiettivi tendono a coincidere.

4.2.1 Criterio di equivalenza tra struttura non lineare e struttura elastico viscosa.

La storia della risposta di un sistema soggetto ad una forza:

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t) \quad \text{Eq. 1}$$

È del tipo:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) \quad \text{Eq. 2}$$

$$v(t) = u_0 \omega \sin(\omega t - \phi) \quad \text{Eq. 3}$$

Tralasciando la fase ϕ l'andamento temporale dello spostamento e della velocità di risposta sono dati nella Figura 15.

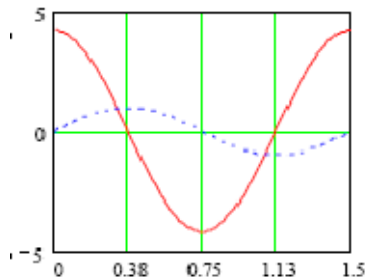
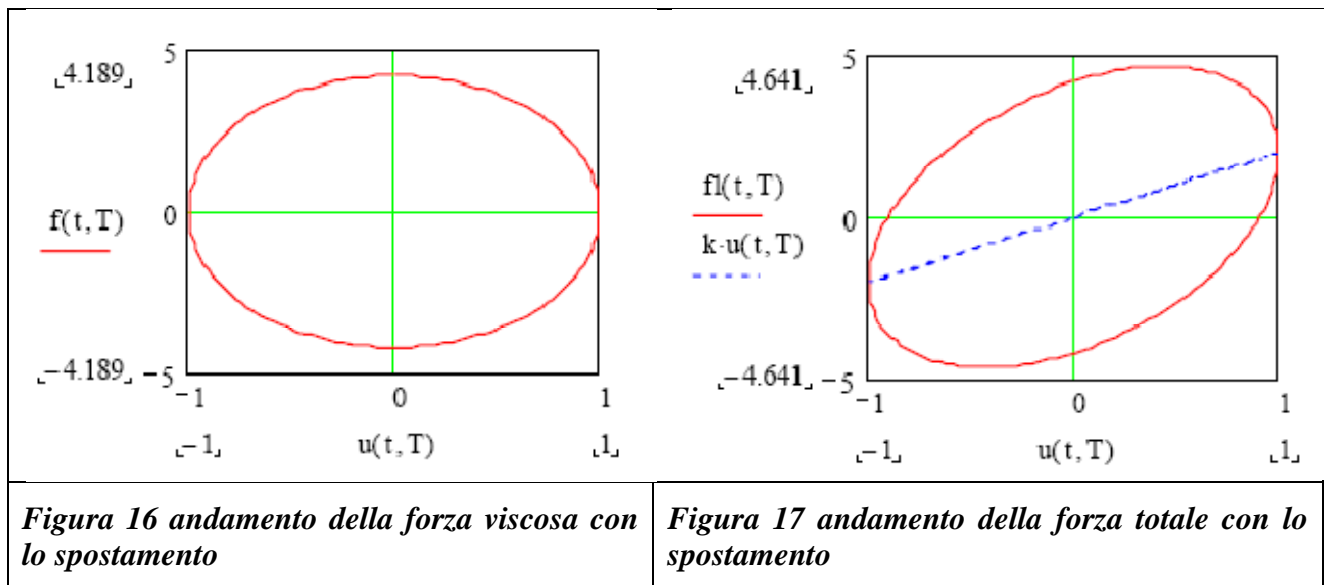


Figura 15 esempio andamento dello spostamento e della velocità nel tempo per eccitazione sinusoidale

La forza dissipativa viscosa è data da: $f(t) = c\dot{u}(t)$, la forza elastica da: $ku(t)$, la forza totale dalla somma delle due forze: $f_1(t) = c\dot{u}(t) + ku(t)$. I diagrammi forza spostamento e forza totale spostamento sono indicati nella Figura 16 e nella Figura 17.



Se si fa un esperimento si misura in genere una parte elastica che si somma alla parte viscosa già vista, ottenendo la curva di destra (Figura 17). L'energia dissipata vale

$E_D = \int_0^{2\pi/\omega} (c\dot{u})\dot{u}dt = \int_0^{2\pi/\omega} c\dot{u}^2 dt = \int_0^{2\pi/\omega} c[\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]^2 dt = c\pi\omega u_0^2$	Eq. 4
--	--------------

poiché: $c=2v\omega_n m$; $m=k/(\omega_n)^2$, l'Eq. 2'Eq. 4 diviene:

$E_D = 2v\omega_n k/(\omega_n)^2 \pi\omega u_0^2 = 2\pi v(\omega/\omega_n) \pi k u_0^2 = [4\pi v(\omega/\omega_n)] [(1/2)k u_0^2];$	Eq. 5
---	--------------

$E_d = 4\pi v(\omega/\omega_n)] E_{el}; \text{ ove } E_{el} = [(1/2)k u_0^2];$	Eq. 6
--	--------------

Dalla Eq. 6 si ricava:

$v = [1/4\pi] (\omega_n/\omega) E_d/E_{el};$	Eq. 7
--	--------------

Dato un generico legame forza spostamento non lineare, si può, per un ciclo di assegnata ampiezza ricavare i valori di rigidezza elastica secante K e dello smorzamento equivalente v . La prima si ottiene unendo l'origine con il punto della curva ciclica forza spostamento corrispondente allo spostamento massimo, mentre lo smorzamento equivalente si ottiene con la Eq. 7.

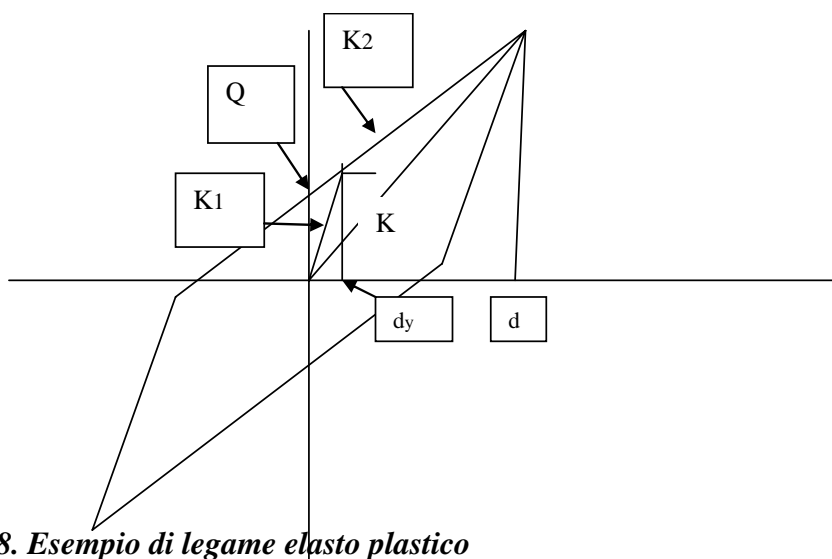


Figura 18. Esempio di legame elasto plastico

Se è data una curva elasto plastica incrudente, quale quella in

Figura 18, se Q è l'intercetta della curva con l'asse delle ordinate, K_1 la rigidezza elastica iniziale, K_2 la rigidezza del ramo plastico, d lo spostamento massimo, d_y lo spostamento di snervamento, K la rigidezza secante, l'energia dissipata può essere espressa nella forma

$$E_d = 4Q(d - d_y) \quad \text{Eq. 8}$$

Pertanto lo smorzamento si ottiene dalla espressione:

$$v = [1/4\pi] (\omega_n / \omega) E_d / E_{el} = v = [1/4\pi] (\omega_n / \omega) 4Q(d - d_y) / [(1/2)k d^2] \quad \text{Eq. 9}$$

In genere si assume che il maggior contributo allo smorzamento complessivo è dato dalle frequenze prossime alla frequenza propria della struttura, quando $(\omega_n / \omega) = 1$, pertanto la Eq. 9 diviene:

$$v = [1/4\pi] 4Q(d - d_y) / [(1/2)k d^2]; \quad \text{Eq. 10}$$

Nel caso elasto plastico $Q = F_y$, cioè l'intercetta è uguale alla forza di snervamento della struttura, nonché alla resistenza massima, e la rigidezza secante vale: $k = F_y / d$, la Eq. 10 diviene:

$$v = (2/\pi) (1 - d_y / d) = (2/\pi) (1 - 1/\mu); \quad \text{Eq. 11}$$

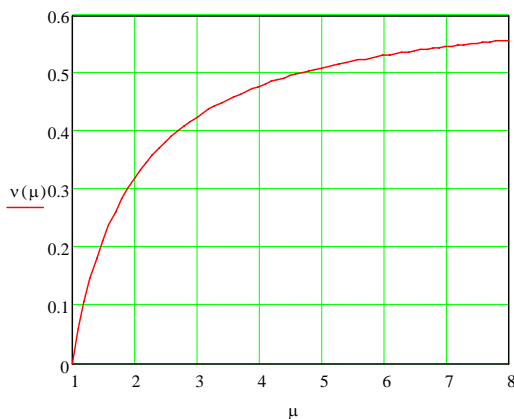


Figura 19 Smorzamento equivalente al crescere della duttilità in spostamento nelle strutture elasto plastiche perfette

Si noti che lo smorzamento equivalente si addiziona allo smorzamento che comunque viene sempre associato alla struttura in campo elastico, in genere assunto pari al 5%.

Quando la struttura ha un incrudimento positivo dopo lo snervamento, come indicato in

Figura 18,

$$k d = Q + k_2 d \quad \text{Eq. 12}$$

da questa si ottiene l'espressione della rigidezza secante:

$$k = Q/d + k_2. \quad \text{Eq. 13}$$

Inoltre, sempre con riferimento alla

Figura 18, ed alla Eq. 10 si ha:

$$d_y = Q/(k_1 - k_2); \quad Q = k_1 d_y - k_2 d_y \quad \text{Eq. 14}$$

$$\text{detto: } a = Q/(d_y k_2) \quad \text{Eq. 15}$$

$$\nu = (2/\pi)[a(\mu - 1)]/[(\mu + a)\mu] \quad \text{Eq. 16}$$

Quando la derivata rispetto alla duttilità μ della Eq. 16 è nulla, si ottiene il valore di μ per il quale lo smorzamento è massimo:

$$\mu(v_{max}) = 1 + (1 + \alpha)^{0.5} \quad \text{Eq. 17}$$

$$v_{max} = (2\alpha/\pi) (1/[2(1+\alpha)^{1/2} + (2+\alpha)]) \quad \text{Eq. 18}$$

Si vede pertanto che, mentre nel caso elasto plastico perfetto lo smorzamento aumenta sempre all'aumentare della duttilità richiesta, nel caso di una struttura dotata di incrudimento lo smorzamento aumenta sino ad un certo valore della duttilità, oltre la quale lo smorzamento diminuisce. In realtà per le usuali strutture civili, il valore dell'incrudimento è in generale solo di qualche percento. Se si utilizza l'Eq. 17 si vede, che il valore della duttilità cui corrisponde lo smorzamento massimo è molto grande, per valori di dell'icrudimento $\alpha = k_2/k_1 < 0.02$.

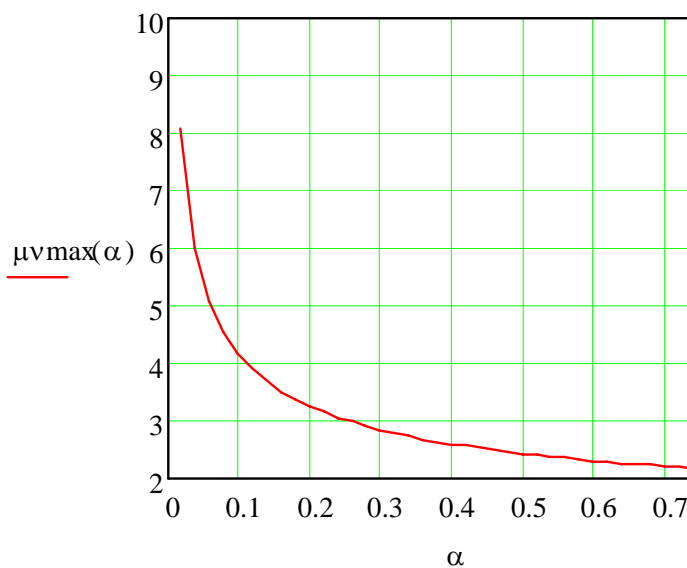


Figura 20 Duttilità a cui corrisponde lo smorzamento equivalente massimo al variare dell'incrudimento

Si può pertanto concludere che sino a valori di incrudimento pari a 0.02 la dissipazione e quindi lo smorzamento equivalente aumentano con l'ampiezza dell'escursione plastica, cioè con la massima duttilità richiesta. Per valori di incrudimento maggiori, lo smorzamento cresce sino ad un certo valore della duttilità per poi diminuire. In particolare occorre controllare con attenzione i casi con incrudimento sinosuperiore a 0.1, valore per il quale la duttilità corrispondente allo smorzamento massimo è pari a 4.16, con uno smorzamento massimo pari a 0.33.

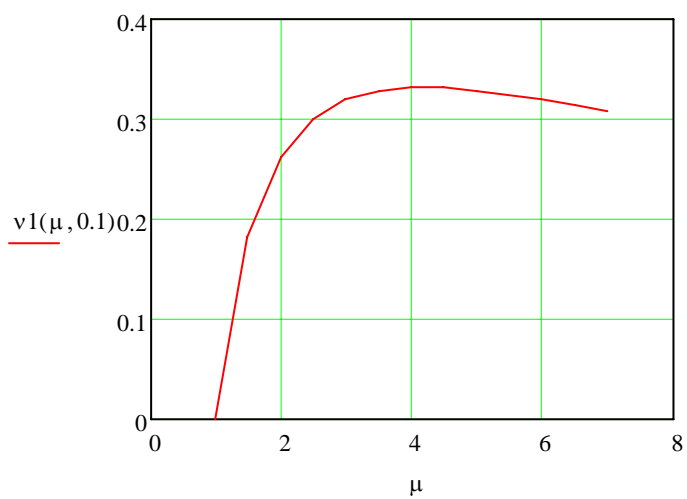
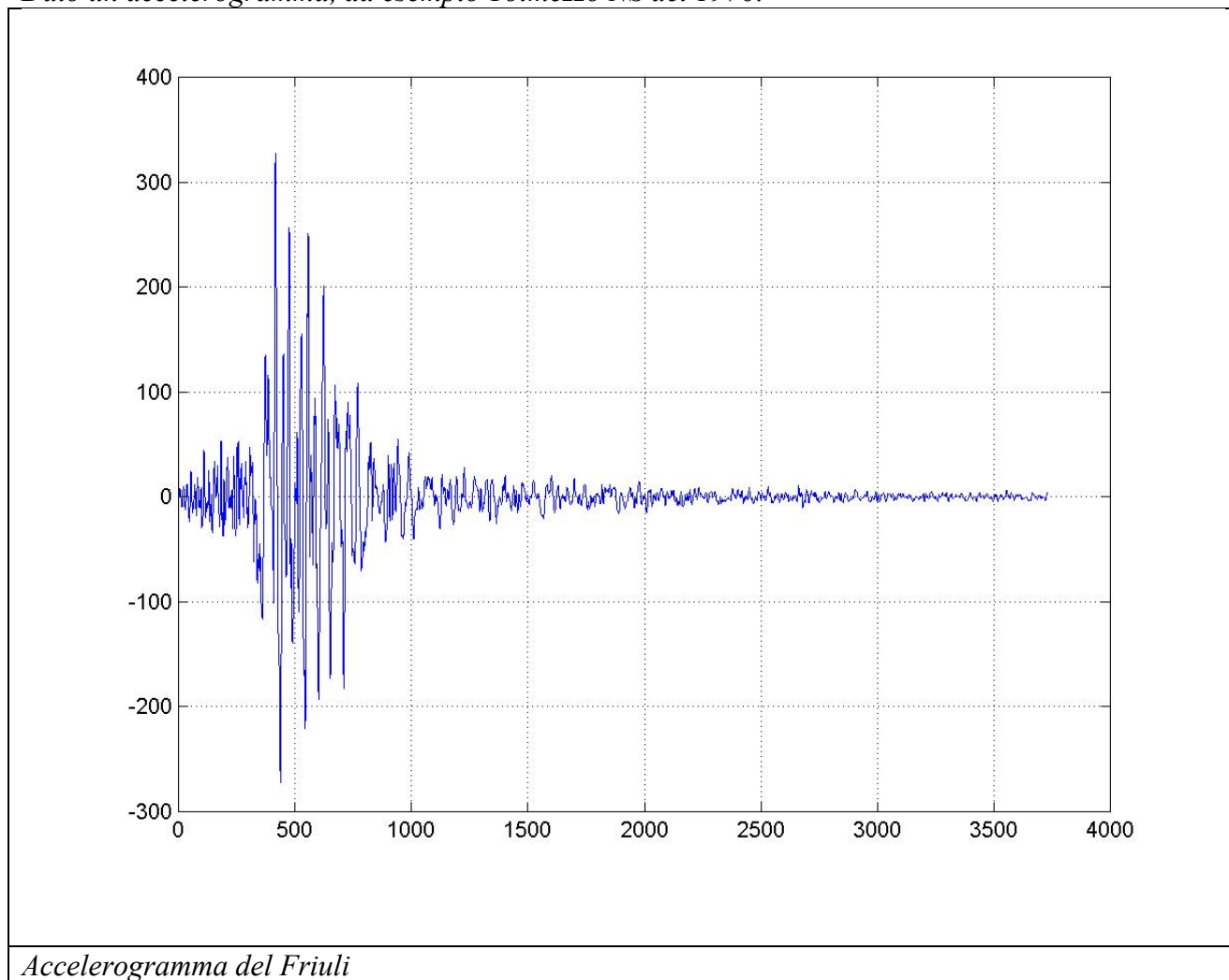


Figura 2 Smorzamento equivalente alla struttura elasto plastica con incrudimento pari al 10%

5 Rappresentazione degli accelerogrammi in serie di fourier: lo spettro di potenza

Dato un accelerogramma, ad esempio Tolmezzo NS del 1976:



Questo accelerogramma registrato ad intervalli di 0.01 secondi per un totale di 3728 punti, ha una durata di 37, 28 secondi. Può essere approssimato con una funzione del tipo serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_0^n A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t = A_0 + \sum_1^n A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

essendo :

$$\omega_n = \frac{2\pi}{D} n$$

il primo termine della serie è nullo in una funzione a media nulla quale un accelerogramma.

Per esprimere l'accelerogramma in serie di fourier, occorre determinare il valore delle costanti A_n e B_n . Esse vanno scelte in modo che minimizzino lo scarto tra la funzione da approssimare $a(t)$, l'accelerogramma, e la funzione approssimante $f(t)$. Se il numero di termini che si utilizzano è pari al numero di punti della funzione, lo scarto è evidentemente nullo, si potrebbe infatti scrivere un sistema di n equazioni in n incognite, ma il beneficio che si ottiene con la nuova formulazione è nullo.

Se il numero di termini che si considera è modesto, si può avere un beneficio reale, riducendo al dimensione del problema da trattare.

In realtà, oggi non è tanto interessante questo aspetto, quante la comprensione di alcune alcune caratteristiche del dell'accelerogramma che ci consentono di capire la fisica del problema.

Le costanti A_n e B_n si ottengono cercando i valori che minimizzano lo scarto quadratico medio tra la $a(t)$ e la funzione approssimante $f(t)$:

$$S = \frac{1}{D} \int_0^D (a(t) - f(t))^2 dt$$

derivando S rispetto ad A_n e B_n si ottengono le seguenti espressioni:

$$A_n = \frac{2}{D} \int_0^D a(t) \cos \omega_n t dt$$

$$B_n = \frac{2}{D} \int_0^D a(t) \sin \omega_n t dt$$

il pregio della formulazione è che si può inizialmente scegliere un numero limitato di armoniche approssimanti, valutare graficamente la differenza con la funzione da approssimare, e successivamente aggiungere un certo numero di termini sino a che il risultato non sia soddisfacente. Lo scarto diminuisce all'aumentare del numero di termini della serie.

L'espressione di Fourier può essere riscritta nella forma:

$$f(t) = \sum_0^N C_n (\cos \omega_n t - \phi_n)$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\phi_n = \arctan g \frac{B_n}{A_n}$$

Poiché si dimostra che, se $N=\infty$, detta W la potenza media dell'accelerogramma:

$$W = \frac{1}{D} \int_0^D a(t)^2 dt = \frac{1}{2} \sum_1^N C_n^2$$

un criterio per decidere come arrestare il calcolo di nuove armoniche è che la differenza tra la valutazione esatta della potenza e quella approssimata considerando un numero limitato di armoniche, sia modesta:

$$\delta = \frac{1}{D} \int_0^D a(t)^2 dt - \frac{1}{2} \sum_1^N C_n^2 \leq \varepsilon$$

5.1 Esercizio

Dato il terremoto del Friuli 1976 (Tolmezzo N-S)

Cliccando su QBasic si avvia il Basic. Si esegue quindi il programma ACC.

Il file accorciato a 16.64 secondi si trova su FR76C.TXT.

Si esegua il calcolo senza A0 con sole 10 armoniche. La maggiore è $2\Pi I_0/D = 62.8/16.64 = 3.774$

Sullo schermo appaiono l'accelerogramma di input, gli spettri dei Cn, funzione del periodo o della frequenza, il massimo valore f della funzione approssimante ed il massimo valore dello scarto quadratico medio tra funzione approssimante e da approssimare (cioè l'accelerogramma).

Si può quindi chiedere il calcolo della risposta all'accelerogramma. Viene prima calcolata la funzione di trasferimento e quindi data la funzione di risposta.

Si riporta l'accelerogramma registrato a Tolmezzo (Friuli) nel 1976 in direzione N-S

3728	0.01						
1.030	0.242	0.694	3.565	6.524	8.010	6.942	3.628
0.746	-0.470	-1.502	-3.579	-5.915	-7.641	-9.198	-8.822
-4.200	1.570	5.500	8.715	10.109	9.087	8.304	6.543
1.956	-3.093	-7.597	-11.130	-12.400	-12.434	-10.938	-6.852
-2.057	3.275	9.037	11.900	11.359	9.094	5.900	2.958
-1.288	-7.449	-11.520	-14.012	-17.919	-21.512	-23.808	-22.719
-14.914	-4.067	7.137	18.596	23.726	22.734	23.027	19.992
9.692	-0.410	-8.458	-14.894	-15.228	-11.878	-10.072	-9.034
-7.446	-4.173	0.945	5.666	9.853	12.057	8.780	2.090
-3.385	-5.886	-8.094	-14.333	-17.551	-8.021	5.170	12.051
16.835	18.306	13.177	7.741	3.702	-1.142	-5.117	-8.831
-10.205	-6.252	-3.566	-5.923	-9.042	-9.814	-3.580	7.112
9.036	1.656	-7.907	-20.746	-29.110	-25.322	-22.783	-26.936
-24.444	-11.323	9.984	34.131	44.684	40.992	38.523	32.400
16.524	4.267	-4.304	-15.977	-20.198	-15.913	-13.580	-11.055
-7.588	-6.880	-5.316	-4.050	-5.700	-7.657	-10.471	-5.746
13.122	25.450	19.569	10.164	-2.084	-19.398	-23.693	-12.745
-7.488	-13.114	-14.012	-4.032	2.159	-4.796	-17.110	-29.267
-34.623	-26.801	-20.238	-20.662	-10.311	6.171	13.831	22.615
33.643	33.379	26.240	21.035	15.853	8.788	1.659	-0.346
2.381	2.615	1.216	3.411	12.389	26.478	30.348	20.839
15.484	10.354	-3.243	-8.574	-6.752	-13.007	-18.665	-21.996
-28.684	-24.700	-10.525	2.669	-25.935	52.653	52.851	29.671
7.693	-8.452	-20.981	-22.691	-14.870	-18.084	-36.712	-36.930
-6.486	16.586	16.162	13.770	7.817	-11.997	-26.636	-24.559
-19.232	-16.271	-12.889	-9.267	0.204	15.200	23.309	25.766
32.235	37.385	37.654	37.457	31.756	20.122	10.557	-0.036
-10.285	-10.196	-5.922	-3.955	-0.579	-2.589	-9.057	-5.477
1.517	1.075	2.177	5.926	4.907	-2.608	-19.491	-30.711
-15.110	5.896	9.479	19.169	38.839	33.837	7.622	-7.080
-11.662	-21.028	-29.407	-31.409	-33.429	-37.394	-36.243	-24.691
-3.850	23.586	47.122	47.625	28.320	19.614	33.306	50.255
52.468	36.537	9.490	-16.238	-26.227	-10.483	13.911	17.059
7.956	9.447	10.907	10.270	22.897	31.555	21.204	13.649
12.321	0.649	-9.303	-4.353	-0.757	-8.296	-16.796	-19.743
-12.997	4.911	18.065	16.670	13.821	12.772	11.311	21.794
33.712	23.551	5.663	-3.674	-12.426	-15.624	-10.225	-10.178
-16.983	-25.309	-29.187	-22.220	-17.469	-18.149	-6.469	9.141
19.921	38.601	47.292	32.653	27.065	34.461	28.741	20.775
25.247	27.587	23.917	26.488	33.026	29.342	14.152	-4.661
-28.850	-53.540	-61.623	-52.552	-33.889	-10.199	-1.791	-16.050
-25.745	-17.516	-6.303	-3.168	-9.614	-22.274	-37.927	-57.761
-75.981	-81.981	-75.387	-65.537	-61.311	-60.733	-57.211	-53.898
-56.571	-65.164	-70.473	-59.406	-44.667	-49.367	-62.878	-73.808
-90.145	-100.937	-99.959	-102.932	-107.037	-107.930	-113.809	-116.545
-112.785	-103.972	-75.167	-39.153	-22.019	-7.475	16.143	37.407
66.002	101.114	121.493	131.876	134.961	115.187	88.189	77.751
69.324	51.187	39.890	40.172	42.913	56.004	85.658	111.202

115.654	108.825	99.651	83.068	61.953	46.849	36.143	25.003
18.892	18.151	15.435	10.884	4.653	-5.002	-11.033	-11.414
-11.756	-11.298	-14.284	-26.414	-39.834	-56.093	-83.682	-101.188
-79.201	-26.897	29.415	96.002	188.305	272.754	311.470	325.965
327.202	284.853	219.231	180.607	157.938	120.535	72.844	28.269
-7.318	-39.496	-78.712	-117.662	-143.519	-154.440	-153.364	-153.573
-167.418	-185.474	-198.709	-218.224	-249.891	-271.794	-258.594	-217.361
-171.046	-126.496	-80.096	-25.073	33.397	69.700	86.748	112.313
134.479	135.659	125.172	91.069	31.672	-15.172	-36.666	-39.938
-28.979	-31.415	-51.728	-61.176	-66.416	-76.329	-72.480	-57.848
-35.570	1.236	35.138	60.900	90.781	119.302	146.133	172.977
197.178	230.309	256.519	248.027	218.094	158.424	52.415	-43.557
-84.703	-87.183	-62.896	-39.996	-48.888	-71.780	-101.606	-136.068
-139.795	-121.091	-116.125	-116.749	-117.086	-114.642	-89.945	-64.354
-58.654	-39.138	-2.349	13.899	9.223	5.590	7.851	8.371
-1.460	-6.641	15.557	47.321	60.594	61.090	51.634	18.284
-31.081	-73.902	-100.272	-109.410	-105.690	-90.759	-64.246	-38.512
-11.812	35.800	88.337	117.774	133.282	144.016	150.367	154.964
141.744	113.780	88.167	39.292	-30.710	-73.801	-98.453	-127.017
-141.979	-153.161	-169.602	-169.281	-164.690	-179.816	-205.140	-220.481
-206.629	-168.373	-120.294	-47.679	37.469	93.639	128.199	159.785
174.407	171.862	177.612	212.639	250.994	245.862	216.527	177.345
82.161	-26.230	-57.095	-43.857	-30.578	6.831	39.647	31.681
16.103	14.881	20.445	22.950	4.813	-25.309	-44.030	-57.003
-64.624	-50.202	-17.752	19.380	55.268	77.173	76.219	68.720
76.894	93.714	92.082	63.623	24.410	-11.183	-42.362	-65.451
-69.375	-63.570	-72.129	-94.143	-116.380	-138.752	-160.130	-178.738
-192.698	-189.265	-167.604	-142.128	-115.855	-89.502	-67.980	-50.338
-36.952	-22.785	-1.140	16.277	25.469	39.864	58.511	78.800
103.002	117.865	124.246	140.592	162.952	184.143	201.364	193.676
164.892	141.695	108.386	53.244	13.502	-3.381	-21.405	-29.996
-23.568	-20.968	-18.578	-16.507	-25.915	-22.955	3.350	22.524
37.208	64.398	73.704	49.877	23.144	-0.568	-40.451	-90.285
-128.112	-148.863	-163.340	-172.804	-165.401	-143.883	-122.592	-100.615
-73.202	-50.010	-43.637	-53.347	-61.082	-55.403	-52.387	-61.440
-61.781	-39.249	-2.217	37.743	69.137	87.685	100.853	106.787
98.357	84.527	72.955	60.655	56.174	66.343	74.713	69.328
57.884	47.980	45.986	53.630	59.113	59.988	64.717	68.486
68.733	68.965	59.851	43.770	31.930	11.848	-15.702	-28.726
-35.553	-46.500	-47.095	-41.343	-37.867	-31.639	-34.398	-49.713
-63.388	-84.779	-121.369	-157.267	-181.445	-182.133	-159.393	-131.534
-87.706	-23.338	20.484	37.821	55.766	62.817	55.042	52.548
48.786	43.597	52.716	65.150	73.754	86.079	89.736	79.681
70.633	64.283	58.347	55.963	55.944	62.534	74.929	77.925
68.833	55.075	36.466	19.536	10.964	1.112	-15.080	-31.739
-47.026	-56.243	-54.566	-50.140	-49.561	-49.816	-50.550	-52.871
-56.353	-60.571	-61.913	-61.326	-63.539	-62.099	-51.120	-34.966
-12.508	13.872	32.284	46.783	66.258	81.966	91.611	102.518
108.110	102.014	89.897	74.697	57.702	43.223	32.711	24.399
14.784	4.174	-2.950	-10.705	-24.928	-40.266	-53.802	-66.112
-70.195	-66.056	-63.224	-62.577	-61.063	-59.076	-55.068	-49.736

-45.681	-42.705	-43.446	-48.541	-51.044	-48.648	-45.054	-41.168
-37.506	-34.814	-33.509	-35.586	-38.350	-36.263	-30.888	-26.015
-22.178	-18.962	-13.744	-5.492	3.916	16.086	29.558	37.166
38.626	36.810	31.012	26.285	29.120	37.103	45.280	50.610
52.323	51.470	44.354	28.932	12.293	-2.910	-17.641	-23.046
-14.981	-3.680	5.750	17.326	29.674	36.731	37.058	33.787
28.824	22.387	16.686	13.299	10.702	8.534	7.682	8.071
9.619	10.467	8.839	7.043	6.138	4.318	2.468	0.927
-2.635	-7.571	-11.734	-14.575	-15.106	-14.165	-14.655	-15.687
-14.358	-11.431	-8.842	-6.499	-4.756	-4.947	-5.905	-4.786
-2.366	-1.476	-0.717	2.527	6.644	9.833	11.772	9.921
3.405	-4.553	-12.910	-21.867	-28.159	-30.725	-33.785	-39.072
-42.714	-41.893	-38.686	-35.785	-33.323	-29.726	-22.113	-10.273
1.811	13.278	24.915	34.065	39.752	38.287	24.749	9.306
-0.849	-14.726	-23.037	-10.617	5.156	12.552	23.183	31.088
27.971	22.574	13.818	1.877	-4.867	-13.198	-21.277	-13.291
2.057	12.467	24.301	31.817	26.670	19.729	16.761	13.183
8.059	0.598	-7.212	-11.666	-14.020	-11.878	-2.928	6.584
15.624	27.359	37.319	44.695	52.443	54.670	48.827	41.591
34.747	28.703	26.874	25.797	22.221	19.617	15.498	6.318
-2.307	-9.543	-20.084	-29.675	-33.711	-35.758	-37.781	-38.454
-37.475	-35.696	-35.861	-38.473	-39.631	-37.783	-34.574	-30.430
-24.815	-17.635	-10.558	-6.370	-5.859	-7.687	-9.431	-9.479
-8.719	-7.064	-3.693	-0.251	3.323	8.243	12.607	16.460
21.935	28.032	33.360	37.321	40.056	42.624	41.201	32.665
23.356	17.087	11.134	7.074	5.973	5.270	5.825	6.356
2.501	-4.145	-10.852	-18.275	-24.845	-28.776	-31.863	-35.918
-39.698	-39.663	-34.337	-26.557	-19.713	-15.635	-14.444	-14.146
-13.428	-12.614	-11.782	-11.435	-11.944	-12.360	-12.122	-10.995
-8.509	-5.141	-1.507	2.457	6.385	8.752	7.564	2.820
-3.292	-8.804	-11.964	-12.248	-11.580	-10.607	-8.474	-6.050
-4.042	-2.594	-2.605	-3.866	-6.221	-9.560	-11.335	-10.556
-8.445	-4.770	-1.464	-0.612	1.093	4.667	7.167	9.964
14.241	17.243	18.719	19.235	17.371	13.736	10.257	8.355
9.151	11.539	13.903	16.395	18.548	19.284	18.452	16.815
16.158	16.823	17.077	16.648	15.920	14.242	11.855	9.502
7.901	7.575	7.207	6.831	9.050	13.237	16.558	18.010
16.258	11.585	7.602	5.516	4.086	3.042	1.558	-0.675
-2.825	-5.491	-8.085	-8.045	-5.377	-1.880	1.095	2.127
1.356	-0.135	-2.179	-3.341	-2.233	-0.646	-0.373	-1.408
-3.858	-6.800	-8.855	-11.241	-15.286	-19.584	-23.163	-26.653
-29.352	-29.943	-28.435	-24.827	-19.483	-13.694	-7.176	0.612
8.300	15.334	20.834	21.776	18.150	12.848	7.345	3.765
3.570	4.772	6.417	8.252	8.483	8.251	8.972	7.858
3.829	-1.184	-5.867	-8.161	-7.303	-5.287	-2.767	-0.024
2.074	4.476	6.801	6.859	4.934	2.002	-1.336	-2.795
-1.346	1.744	6.101	11.286	15.291	16.928	16.578	13.966
8.723	3.024	-1.209	-5.373	-9.811	-12.808	-14.958	-17.484
-20.338	-23.775	-26.610	-26.961	-25.154	-21.949	-18.379	-15.913
-14.091	-12.513	-10.839	-6.245	1.548	9.034	14.882	18.800
19.847	18.803	15.931	10.696	4.590	-0.947	-5.318	-7.687

-9.022	-11.036	-13.045	-13.429	-12.187	-10.896	-10.736	-11.408
-12.572	-13.848	-13.766	-11.358	-7.248	-2.628	1.314	3.469
3.357	2.007	0.661	-0.573	0.271	5.858	13.836	20.552
25.701	28.145	26.935	24.274	20.762	15.357	8.841	2.223
-2.914	-4.729	-4.305	-3.820	-4.460	-6.277	-7.481	-8.087
-9.748	-10.608	-9.834	-10.210	-11.027	-10.202	-8.855	-7.120
-5.056	-4.432	-4.640	-4.487	-4.561	-4.899	-6.187	-8.813
-10.479	-10.046	-7.954	-4.168	-0.509	1.717	3.841	5.509
6.603	9.476	13.342	15.562	16.825	18.184	18.939	18.519
16.992	15.199	13.618	12.226	11.829	11.880	10.902	9.647
8.585	7.522	7.535	7.494	6.098	5.579	5.554	3.462
0.378	-3.479	-8.954	-13.104	-13.828	-11.511	-6.105	0.277
5.100	7.936	7.194	2.811	-2.228	-7.292	-12.028	-14.100
-13.756	-12.395	-10.242	-8.448	-7.306	-6.109	-5.649	-6.000
-5.822	-4.198	-0.524	4.298	8.501	11.919	14.399	15.623
16.501	16.951	16.502	16.317	16.269	14.693	11.942	9.181
5.521	0.090	-5.622	-10.852	-16.533	-20.780	-21.728	-22.217
-22.037	-16.716	-7.727	1.173	9.915	15.560	15.491	14.084
14.505	15.403	16.085	15.608	13.648	11.769	9.350	5.733
2.990	1.284	-0.494	-1.505	-1.896	-3.122	-5.645	-9.482
-13.853	-17.669	-21.168	-24.148	-25.193	-23.569	-19.475	-14.289
-10.294	-8.441	-8.307	-8.829	-7.973	-5.251	-2.850	-1.595
-0.455	0.027	-0.761	-1.523	-2.111	-3.499	-4.634	-4.763
-5.475	-6.894	-7.326	-6.306	-3.474	1.413	6.532	10.263
11.979	10.562	7.382	5.852	6.089	6.953	9.710	14.393
18.490	19.943	17.602	11.762	5.100	0.187	-2.728	-4.203
-3.957	-2.066	0.213	2.165	3.693	4.054	3.165	1.805
0.282	-0.840	-1.450	-2.505	-3.611	-4.052	-4.460	-4.708
-5.084	-6.963	-9.562	-11.799	-13.525	-12.740	-9.340	-6.498
-4.433	-1.585	1.751	5.574	9.138	10.834	11.185	10.087
6.300	1.258	-3.438	-7.514	-9.210	-7.627	-4.257	0.021
4.256	6.339	5.451	2.313	-2.545	-8.345	-13.102	-15.022
-14.040	-10.709	-5.668	-0.821	1.761	1.728	0.370	-0.720
-1.736	-3.868	-6.507	-8.467	-9.008	-6.651	-1.522	4.144
9.198	12.690	13.349	11.990	10.537	10.394	11.625	12.168
11.027	9.589	8.610	8.314	8.203	6.764	4.996	4.227
2.628	0.113	-1.581	-3.146	-4.656	-4.921	-4.057	-1.854
1.081	2.598	2.305	0.170	-3.623	-6.069	-6.093	-6.351
-7.262	-7.096	-5.423	-2.987	-1.177	-0.317	0.467	0.743
-0.074	-1.066	-1.161	0.204	2.434	4.345	6.263	8.797
11.543	13.947	15.222	15.510	15.812	15.210	12.724	9.656
6.988	4.746	3.075	1.994	1.545	1.052	0.150	0.053
0.112	-1.023	-1.337	-0.166	0.522	1.310	2.572	2.756
2.257	1.326	-0.700	-2.631	-4.107	-5.873	-7.215	-8.223
-9.858	-12.036	-14.433	-16.009	-16.221	-16.626	-17.679	-18.520
-19.038	-18.706	-18.043	-18.566	-19.505	-20.255	-21.009	-19.970
-17.302	-15.051	-12.029	-7.705	-3.824	0.263	4.716	7.461
8.593	9.311	9.867	10.669	11.540	12.013	11.836	10.550
8.821	7.071	4.700	3.304	4.189	5.454	6.078	6.076
5.041	4.455	5.217	6.501	9.250	13.452	16.816	18.991
19.969	18.734	16.233	13.625	10.614	7.292	4.124	1.736

-0.212	-3.583	-7.915	-10.993	-13.291	-15.288	-15.384	-13.564
-11.111	-8.431	-6.202	-4.949	-3.567	-1.150	1.292	3.114
5.300	7.563	8.773	9.802	10.934	10.971	10.327	9.053
5.961	1.983	-1.679	-5.317	-8.361	-10.352	-11.338	-10.304
-7.241	-3.721	-0.866	0.558	0.441	-0.273	-0.443	0.748
2.349	2.471	1.328	-0.026	-1.174	-1.360	-0.923	-0.891
-0.983	-1.517	-3.033	-4.277	-4.464	-3.798	-2.185	-0.249
1.793	4.785	7.728	8.596	7.719	6.764	6.071	5.244
4.587	3.763	1.749	-0.508	-1.991	-3.857	-5.759	-6.328
-6.639	-7.252	-7.414	-7.582	-7.378	-6.105	-4.985	-4.424
-4.057	-4.310	-4.231	-3.025	-1.529	1.009	5.464	10.213
14.070	16.758	17.214	15.203	11.837	8.027	4.457	2.163
1.514	1.149	0.353	0.330	0.687	0.203	-0.016	-0.254
-2.332	-4.659	-5.607	-6.042	-5.160	-2.633	-0.520	1.080
2.396	1.771	-0.333	-2.186	-3.863	-5.363	-6.291	-7.094
-8.066	-8.649	-7.919	-5.914	-3.399	-0.372	2.175	2.803
3.311	5.183	6.867	8.553	10.918	12.066	11.811	11.621
11.313	10.692	9.562	7.240	4.297	1.455	-1.104	-3.382
-6.339	-9.652	-11.609	-12.146	-11.079	-8.281	-6.044	-5.222
-4.982	-6.251	-8.583	-10.167	-11.279	-11.647	-10.070	-6.840
-2.786	0.326	0.875	-0.282	-2.358	-4.550	-5.017	-4.526
-4.236	-3.004	-1.757	-1.497	-0.633	-0.076	-1.552	-3.957
-6.784	-9.096	-9.082	-8.150	-7.131	-4.340	-1.230	0.325
1.810	3.169	2.982	2.311	2.390	2.711	2.294	1.015
0.263	0.587	0.804	0.955	1.390	1.002	-0.190	-1.665
-4.045	-6.263	-6.780	-6.753	-6.596	-4.659	-0.768	-4.277
9.408	11.865	10.059	5.845	1.322	-2.753	-5.591	-6.401
-4.844	-1.154	3.110	5.702	6.288	6.763	8.007	8.665
7.632	5.666	4.575	5.003	5.547	5.696	6.365	6.810
6.490	6.676	6.674	5.359	4.355	4.230	4.294	5.511
7.755	9.743	11.426	11.666	9.300	6.265	4.015	1.783
0.114	0.284	1.596	3.026	4.897	6.844	7.672	8.076
8.946	9.083	8.524	8.422	7.930	7.146	7.409	7.749
7.807	8.487	8.351	6.742	4.808	1.757	-2.326	-5.533
-8.271	-11.014	-12.610	-13.542	-14.494	-14.770	-14.622	-14.766
-15.304	-16.041	-15.923	-14.312	-11.912	-8.906	-5.090	-1.048
2.256	3.968	4.298	3.967	2.814	1.562	1.261	0.766
0.029	0.433	0.275	-1.697	-3.352	-4.373	-5.608	-6.324
-7.288	-9.155	-10.390	-11.055	-11.532	-10.558	-8.878	-7.917
-6.928	-5.552	-4.302	-3.462	-3.222	-3.143	-3.260	-3.406
-1.777	0.965	2.564	4.080	5.483	5.107	5.093	6.310
6.734	7.531	8.720	7.809	6.341	5.485	3.477	1.507
0.733	0.278	1.196	3.118	3.769	3.388	2.028	-0.789
-3.514	-5.893	-8.496	-10.015	-9.787	-7.770	-4.309	-1.769
-1.090	-1.217	-2.674	-5.136	-6.445	-5.994	-3.930	-0.453
3.108	5.850	7.715	8.875	9.902	10.828	11.694	13.022
14.108	14.143	13.362	11.444	8.583	6.072	3.947	1.513
-1.096	-3.486	-5.462	-7.006	-7.563	-6.451	-4.552	-2.754
-0.811	0.607	0.895	0.564	-0.428	-1.353	-0.594	1.395
3.051	3.391	2.039	-0.053	-2.565	-6.317	-10.161	-12.838
-14.769	-15.144	-13.489	-10.952	-7.041	-2.003	1.359	3.001

4.777	5.775	5.471	5.258	4.938	4.221	4.303	4.975
5.556	6.551	6.735	4.428	0.913	-2.715	-6.643	-9.123
-8.772	-7.095	-5.444	-3.649	-1.350	0.968	1.956	1.366
0.140	-0.997	-0.981	-0.117	-0.684	-2.565	-3.717	-3.541
-1.728	1.077	3.035	4.064	4.527	4.331	4.058	3.026
1.173	0.307	-0.509	-2.297	-3.181	-3.329	-3.042	-0.941
1.218	2.390	4.189	5.328	5.587	7.067	8.039	7.312
6.725	6.373	6.668	7.569	6.797	5.451	4.829	2.642
0.100	-0.630	-1.084	-0.473	1.580	1.477	-0.825	-3.282
-6.252	-8.083	-7.084	-4.627	-1.243	2.324	4.314	5.115
5.053	4.036	3.608	3.458	2.031	0.285	-0.848	-1.284
-0.619	-0.063	-0.379	-0.264	-0.113	-0.757	-0.707	0.512
2.065	4.147	6.030	6.211	5.079	3.598	2.051	1.082
1.111	2.016	3.791	5.645	6.330	5.807	4.164	1.122
-1.907	-3.304	-3.979	-4.785	-4.643	-3.405	-2.303	-1.612
-1.060	-1.166	-2.521	-4.808	-6.985	-8.090	-7.946	-7.110
-6.013	-4.797	-4.222	-4.932	-6.042	-6.762	-7.420	-7.631
-6.502	-3.843	0.025	3.495	4.957	5.054	3.860	0.470
-3.158	-5.302	-7.390	-8.996	-8.502	-7.699	-7.778	-7.256
-6.699	-7.261	-7.081	-4.888	-1.995	0.506	1.823	1.144
-0.781	-2.650	-3.723	-3.116	-1.267	0.292	1.702	2.801
1.875	-0.476	-2.342	-3.514	-3.456	-1.931	-0.256	1.667
4.170	5.864	6.625	6.824	5.662	3.628	1.380	-1.450
-3.900	-5.339	-6.552	-7.050	-6.351	-5.071	-3.016	-0.562
0.911	1.674	2.727	3.874	4.805	5.891	7.204	7.853
7.198	5.873	4.599	3.449	2.181	0.761	-0.090	-0.495
-1.534	-2.253	-1.509	-0.125	2.201	5.397	7.366	8.230
8.534	7.190	5.831	5.618	4.371	2.682	2.366	2.480
2.913	3.515	3.084	2.461	1.930	0.932	0.596	0.220
-0.961	-0.795	-0.053	-0.598	-0.458	0.257	-0.351	-0.810
-0.768	-1.306	-0.774	1.178	2.514	3.198	4.003	4.472
4.238	3.590	2.870	1.594	-0.625	-2.696	-4.037	-5.164
-5.435	-4.227	-2.359	-0.286	1.759	2.866	3.184	3.753
4.316	4.310	4.414	4.841	4.934	4.936	5.029	4.569
3.756	2.720	0.817	-0.917	-1.054	-0.550	-0.293	0.295
1.084	1.698	2.694	4.049	4.837	4.928	4.924	4.597
3.417	1.835	0.261	-1.522	-3.079	-3.726	-3.721	-3.704
-3.948	-4.095	-3.762	-3.919	-5.474	-6.961	-7.048	-6.811
-6.585	-5.250	-3.517	-2.508	-1.546	-1.007	-2.012	-3.674
-5.163	-6.206	-5.779	-4.539	-3.590	-2.261	-1.752	-3.327
-4.425	-4.157	-4.343	-4.241	-3.304	-3.017	-3.130	-3.126
-3.687	-4.256	-4.063	-3.589	-3.100	-2.503	-2.239	-2.587
-2.605	-1.903	-1.758	-1.824	-0.952	-0.730	-1.401	-1.046
-0.914	-1.903	-2.059	-2.036	-2.864	-2.938	-2.535	-2.852
-3.358	-3.838	-3.670	-2.144	-0.171	2.044	4.500	6.130
7.213	7.813	6.870	5.513	4.914	4.085	3.011	2.323
1.777	1.577	1.889	2.248	2.101	1.034	-0.299	-1.144
-1.690	-1.255	0.262	1.059	1.436	2.887	4.396	5.544
6.893	6.851	4.989	3.192	1.782	0.945	1.588	2.497
2.616	2.532	1.648	-0.007	-0.517	0.266	1.381	2.988
4.719	5.737	5.502	3.485	0.564	-2.048	-4.472	-6.014

-5.904	-5.016	-3.291	-0.725	0.719	0.626	-0.127	-1.672
-2.634	-1.589	-0.224	0.402	1.011	0.949	-0.144	-1.041
-1.611	-2.284	-2.339	-1.634	-0.792	0.891	3.955	6.841
8.404	8.886	8.046	6.275	4.653	2.800	0.723	-0.663
-1.934	-3.001	-2.754	-2.155	-1.683	-0.696	-1.002	-3.227
-4.779	-5.339	-6.049	-6.174	-5.849	-5.805	-5.238	-4.046
-2.805	-1.326	-0.346	-0.757	-1.618	-2.087	-2.430	-2.714
-3.173	-3.875	-3.655	-2.151	-0.652	0.781	3.011	4.970
5.267	4.639	4.251	4.153	4.108	3.922	3.206	1.985
0.824	-0.253	-1.473	-2.138	-1.808	-0.804	1.080	3.166
3.856	3.677	3.329	1.789	-0.117	-0.742	-0.647	-0.092
0.763	0.661	-0.025	-0.873	-2.712	-4.029	-3.460	-2.737
-2.328	-1.446	-0.704	-0.001	1.001	1.783	3.045	5.266
7.444	9.117	9.636	8.094	5.324	2.628	0.939	1.101
2.178	2.876	3.704	4.218	2.924	0.719	-0.955	-2.750
-4.608	-5.167	-4.982	-5.019	-4.309	-3.418	-4.174	-5.055
-4.560	-4.365	-4.474	-3.828	-3.307	-2.196	-0.006	0.786
0.459	0.692	-0.077	-1.202	-0.510	0.219	0.396	1.579
2.513	2.755	3.439	3.474	2.600	1.720	0.229	-1.571
-3.151	-4.892	-5.544	-4.861	-4.366	-3.442	-2.134	-1.902
-1.408	0.100	1.096	1.934	2.757	2.391	1.640	1.248
0.644	-0.085	-1.162	-2.419	-2.690	-2.350	-1.751	-0.137
1.462	2.188	3.099	3.934	3.873	3.658	3.692	3.601
3.131	2.240	1.352	0.502	-0.242	0.268	1.677	1.970
0.992	-0.642	-3.050	-4.936	-4.965	-4.132	-3.428	-2.462
-1.338	-1.127	-1.958	-2.449	-2.366	-2.999	-3.842	-3.705
-3.506	-3.356	-2.163	-0.984	-0.477	0.543	1.060	-0.148
-1.171	-1.208	-1.316	-0.855	0.308	0.738	0.703	0.903
0.583	-0.355	-1.258	-1.962	-2.620	-3.729	-4.891	-4.622
-2.886	-0.249	3.668	7.752	10.083	10.730	10.048	7.972
5.499	3.287	1.320	0.493	1.388	3.018	4.164	4.300
3.402	2.102	1.626	2.057	1.248	-2.356	-7.109	-10.007
-9.681	-7.352	-5.333	-4.515	-4.261	-3.921	-3.699	-4.471
-5.662	-5.246	-3.017	0.021	3.227	4.995	5.173	5.867
6.504	5.301	3.399	2.131	1.689	1.945	1.428	-0.760
-3.573	-5.645	-5.568	-3.535	-1.703	-0.691	-0.048	0.210
1.062	2.846	4.442	5.465	5.682	4.963	3.874	2.548
1.670	1.630	1.203	1.247	2.993	4.193	4.117	3.731
1.896	-0.070	0.252	0.921	1.273	2.891	3.894	3.060
1.808	-0.087	-2.183	-3.137	-3.710	-3.338	-1.261	-0.311
-0.960	-0.683	-0.851	-2.837	-4.343	-5.068	-5.670	-4.976
-3.943	-3.886	-3.683	-3.462	-3.515	-2.885	-2.358	-1.910
-0.584	-0.343	-1.310	-0.994	-0.419	-0.610	-0.359	-0.286
-0.364	0.060	-0.035	0.536	2.519	3.574	4.172	4.652
2.669	0.041	-1.062	-2.061	-1.902	-0.315	0.143	0.612
2.038	2.445	2.488	2.968	3.385	4.490	5.113	4.353
4.192	3.870	2.263	1.506	1.405	0.838	0.947	1.164
0.886	1.219	1.522	1.375	1.446	1.004	0.382	0.511
0.180	-1.124	-2.919	-5.060	-5.901	-4.817	-3.819	-3.275
-2.445	-1.911	-1.422	-0.476	0.166	0.475	0.628	-0.052
-0.948	-1.072	-1.289	-1.866	-1.536	-0.505	0.358	1.794

3.731	4.569	4.192	3.325	1.805	-0.178	-2.037	-3.224
-2.931	-1.326	0.780	2.741	2.909	0.865	-1.255	-2.982
-4.895	-5.728	-5.586	-5.597	-5.048	-4.058	-3.103	-1.342
0.230	0.831	2.062	3.203	3.056	3.313	3.659	2.762
2.091	1.718	0.799	0.849	1.614	1.328	0.622	-0.139
-1.445	-2.483	-3.141	-3.958	-4.342	-3.930	-3.087	-2.390
-2.181	-1.797	-1.296	-1.707	-2.537	-2.924	-2.749	-1.921
-1.577	-1.970	-1.302	-0.425	-0.768	-0.585	-0.191	-1.069
-1.231	-0.153	0.888	2.771	4.605	4.908	5.675	7.106
7.424	7.436	7.221	5.966	5.064	4.850	4.388	4.084
3.696	2.693	1.831	1.207	0.440	-0.243	-0.827	-1.186
-1.283	-1.627	-2.262	-3.041	-3.784	-3.802	-3.187	-2.598
-2.018	-1.666	-1.709	-1.530	-1.166	-1.031	-0.839	-0.568
-0.404	-0.217	-0.198	-0.372	-0.192	0.428	0.991	1.222
1.358	1.698	1.801	1.236	0.802	0.957	0.964	1.286
2.928	4.625	5.163	5.276	4.808	3.342	2.135	1.198
-0.616	-2.466	-3.475	-4.242	-4.752	-4.713	-4.350	-3.843
-3.596	-3.606	-3.551	-3.946	-4.509	-3.925	-2.541	-1.480
-0.704	-0.113	0.211	0.362	-0.094	-1.425	-2.676	-2.833
-2.319	-2.023	-1.593	-0.551	0.410	1.007	1.999	3.640
5.032	4.729	2.492	0.008	-1.709	-3.272	-4.511	-4.538
-3.572	-2.135	-0.127	1.774	2.095	0.842	-0.950	-3.085
-4.723	-4.560	-3.363	-1.936	0.017	1.378	1.757	2.456
2.661	1.714	1.507	2.000	1.801	1.717	2.247	2.818
3.575	4.080	3.857	3.707	3.580	2.601	1.106	-0.363
-1.822	-2.931	-3.674	-4.451	-4.629	-3.740	-2.929	-2.585
-1.785	-0.821	-0.227	0.757	2.069	2.672	2.542	2.236
1.985	1.897	2.122	2.695	3.135	3.211	3.344	3.104
2.010	0.997	0.347	-0.433	-0.583	0.223	1.014	1.777
2.881	3.379	2.554	1.193	-0.148	-1.829	-3.189	-3.149
-2.403	-1.727	-0.901	-0.403	-0.424	-0.589	-1.497	-2.736
-2.801	-2.133	-1.672	-1.237	-0.843	-0.209	1.004	2.189
2.982	3.162	2.471	1.597	1.035	0.931	1.761	2.779
2.988	2.907	2.691	1.987	1.039	-0.125	-1.074	-1.109
-0.612	0.370	1.946	2.904	2.884	2.609	1.803	0.635
0.038	-0.272	-0.702	-0.781	-0.410	0.059	0.218	-0.049
-0.185	-0.144	-0.396	-0.392	0.004	-0.379	-1.289	-1.571
-1.618	-1.464	-0.415	0.650	1.187	1.839	1.984	1.331
0.853	0.300	-0.424	-0.439	-0.192	0.130	1.112	1.560
0.578	-0.650	-1.350	-1.812	-2.485	-3.145	-3.192	-3.541
-4.338	-3.681	-2.463	-2.491	-2.181	-1.574	-2.178	-2.244
-1.422	-1.405	-1.101	-0.274	-0.463	-0.817	-0.671	-0.509
0.071	0.429	0.116	0.050	-0.408	-1.382	-1.589	-1.916
-2.641	-2.240	-1.594	-1.444	-0.605	0.080	-0.311	-0.630
-0.781	-0.985	-0.739	-0.668	-1.031	-1.116	-1.102	-0.853
0.245	1.720	2.985	3.502	2.673	1.057	-0.881	-3.081
-4.285	-4.084	-3.432	-2.045	-0.018	1.505	2.642	3.013
1.884	0.691	-0.059	-1.069	-1.045	-0.049	0.173	0.410
0.795	-0.220	-1.477	-1.783	-1.981	-1.780	-0.952	-0.070
1.062	2.019	2.686	3.829	4.495	4.340	4.621	4.652
4.054	4.081	4.136	3.438	2.347	0.688	-0.591	-0.652

-0.802	-1.234	-1.415	-1.697	-1.190	0.030	0.266	0.301
0.743	-0.155	-1.937	-2.837	-3.062	-3.062	-3.011	-3.218
-3.511	-3.930	-4.087	-2.966	-0.916	0.980	1.974	1.336
-0.040	-0.390	-0.102	-0.222	-0.392	-0.250	-0.076	-0.091
0.063	0.879	1.600	1.582	1.998	3.117	3.639	3.545
3.174	2.253	1.573	1.494	1.221	1.092	1.320	1.268
1.489	1.737	0.903	0.447	1.121	1.152	1.364	2.982
3.754	3.113	2.461	0.874	-1.497	-2.750	-3.659	-4.820
-4.376	-2.694	-1.741	-0.906	0.543	1.237	0.789	0.228
-0.173	-0.014	1.216	2.423	2.855	3.126	2.691	0.992
-0.565	-1.106	-1.193	-1.211	-1.250	-1.290	-1.458	-1.658
-1.236	-0.743	-0.879	-0.562	-0.011	-0.166	0.323	1.352
1.473	1.678	1.812	0.748	0.230	0.627	0.387	0.232
0.585	0.872	1.092	0.281	-0.989	-0.854	-0.583	-0.683
0.263	0.874	0.793	1.752	2.532	2.458	2.826	2.821
2.402	2.679	2.517	1.606	0.831	-0.232	-1.118	-1.251
-1.411	-1.208	-0.549	-0.686	-1.111	-1.130	-1.824	-3.151
-3.853	-3.810	-3.660	-3.664	-3.731	-3.845	-3.939	-3.917
-4.021	-3.885	-3.067	-2.601	-2.589	-1.750	-0.698	-0.038
1.062	1.698	1.495	2.351	3.811	4.252	4.307	3.976
2.708	1.464	0.447	-0.589	-1.009	-1.166	-1.618	-1.973
-2.185	-1.877	-0.745	0.149	0.495	0.596	0.142	0.104
0.702	0.104	-0.974	-1.173	-2.004	-3.085	-3.028	-3.476
-4.404	-4.252	-3.982	-3.166	-0.855	0.603	0.938	1.957
2.375	1.921	2.471	3.238	3.310	3.650	3.950	3.505
2.530	1.060	-0.281	-0.609	-0.334	0.041	0.784	1.476
1.234	0.507	0.187	0.228	0.687	1.294	1.128	0.962
1.302	0.353	-1.422	-1.914	-1.890	-1.872	-1.061	-0.278
0.300	1.296	1.942	2.314	2.944	3.136	2.842	2.343
1.716	1.411	0.870	-0.164	-0.635	-0.706	-0.851	-0.878
-1.134	-1.241	-1.031	-1.290	-1.232	-0.569	-0.300	0.206
0.436	-0.927	-2.103	-2.402	-3.099	-3.551	-3.818	-4.368
-4.042	-3.278	-2.407	-0.644	0.483	0.836	1.839	1.660
0.326	0.435	0.757	0.583	1.605	2.350	1.725	1.308
0.660	-0.972	-2.645	-3.936	-4.388	-3.847	-3.026	-1.741
-0.316	0.094	0.026	0.017	-0.128	0.378	1.022	0.701
0.912	1.785	1.220	0.371	0.892	1.053	0.548	0.692
0.395	-1.029	-2.213	-2.696	-2.774	-2.634	-2.516	-1.965
-0.870	0.079	0.769	1.034	0.804	0.831	1.143	1.850
3.750	5.633	6.095	6.122	5.846	4.266	2.014	0.142
-0.924	-1.068	-0.859	-0.605	-0.225	-0.143	-0.626	-1.435
-1.669	-0.277	1.899	3.368	4.220	4.467	3.779	2.641
1.501	0.924	1.133	1.134	0.793	0.484	-0.406	-1.431
-1.972	-2.746	-3.150	-2.283	-1.110	-0.190	0.538	0.969
1.429	1.681	1.734	2.140	2.006	1.356	1.315	0.795
-0.075	0.298	0.405	0.006	1.068	1.932	1.528	1.802
2.301	2.343	2.457	1.795	1.265	1.737	1.049	-0.072
0.024	-0.864	-2.362	-2.371	-2.406	-2.353	-1.006	-0.525
-1.199	-1.324	-1.463	-1.525	-1.280	-1.778	-1.772	-0.685
-0.629	-0.854	0.032	0.282	-0.097	0.292	0.435	0.014
-0.038	-0.120	-0.532	-1.287	-2.548	-3.189	-2.839	-2.829

-3.088	-3.140	-3.466	-3.322	-2.486	-2.412	-2.792	-2.894
-3.434	-3.443	-2.147	-1.429	-1.119	0.387	1.616	1.824
2.806	3.976	3.568	2.621	2.475	2.378	1.709	1.233
1.134	0.594	0.075	0.450	0.610	-0.047	-0.243	-0.052
-0.411	-0.853	-1.231	-1.892	-2.218	-2.129	-2.020	-1.138
0.350	0.801	0.605	1.070	1.069	0.208	0.185	0.442
0.060	0.569	1.073	-0.331	-1.381	-1.099	-1.411	-1.210
0.045	-0.005	-0.562	-0.143	-0.334	-0.984	-0.754	-0.478
-0.564	-0.643	-0.832	-0.799	-0.758	-1.338	-2.145	-3.003
-3.734	-3.470	-2.461	-1.542	-0.449	1.282	3.193	3.948